voir dernier TD THG pour une appli

GROUPES D'ISOMÉTRIES DU TETRAÈDRE ET DU CUBE

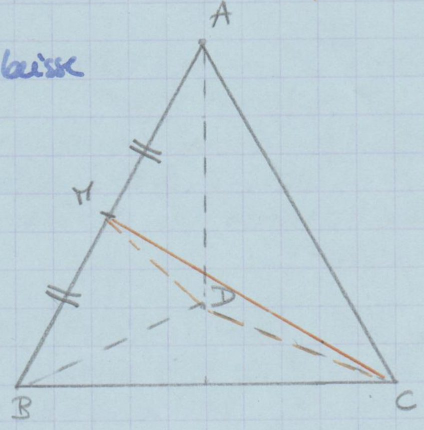
Caldero et Germoni, Histoires hédonistes de gpes et de géométries XIII.3

__Prérequis__ : * isométries, produit (semi) direct, une isométrie qui fixe $n+1$ pts ds ev de dim n est id. / déterminée par l'image d'un repère affine
* $\mathcal{A}_n$ est le seul sous groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$. / ou $\mathcal{A}_n$ engendré par les 3 cycles.
* $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.

Thm : • Les groupes d'isométries du tétraèdre régulier Δ_4 sont $\mathrm{Isom}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$
$\mathrm{Isom}^+(\Delta_4) \simeq \mathcal{A}_4$

• Les groupes d'isométries du cube C_6 sont : $\mathrm{Isom}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$
$\mathrm{Isom}(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Etape 1 : Le tétraèdre régulier Δ_4



Une isométrie conservant les longueurs, $\mathrm{Isom}(\Delta_4)$ laisse invariant l'ensemble des sommets. On note $S = \{A, B, C, D\}$.
On obtient donc un morphisme de groupes.

$$\varphi : \mathrm{Isom}(\Delta_4) \longrightarrow \mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4$$
$$g \longmapsto g_{|S}.$$

* φ est injective : si $\varphi(g) = id_S$, alors g stabilise S (qui est un repère affine de $\mathbb{R}^3$.) donc g fixe 4 points d'un espace affine* de dim 3 donc $g = id$.

* φ est surjective : Soit M le milieu de $[AB]$. On considère la réflexion par rapport au plan (MCD). Cela réalise la transposition $(A\,B)$. Similairement, toutes les transpositions sont dans l'image de φ, or elles engendrent $\mathfrak{S}_4$ donc $\varphi(\mathrm{Isom}(\Delta_4)) = \mathfrak{S}_4$.

Donc φ est un isomorphisme et $\mathrm{Isom}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$.
Comme $\mathrm{Isom}^+(\Delta_4)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Isom}(\Delta_4)$ et que
** $[\varphi(\mathrm{Isom}(\Delta_4)) : \varphi(\mathrm{Isom}^+(\Delta_4))] = [\mathrm{Isom}(\Delta_4) : \mathrm{Isom}^+(\Delta_4)] = 2$, on a
$\mathrm{Isom}^+(\Delta_4) \simeq \mathcal{A}_4$ car $\mathcal{A}_4$ est le seul gpe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$. ***

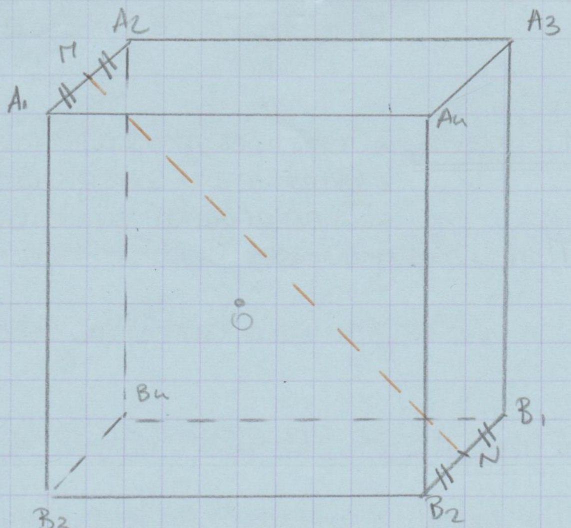
* De même qu'une application linéaire est déterminée par les images des vecteurs d'une base, une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine. Ici (D, A, B, C) forment un repère affine de $\mathbb{R}^3$ car l'espace qu'ils engendrent est de dim 3.
Soit $M \in \mathbb{R}^3$, on note $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les coord barycentriq de M ds le repère affine $(A_0, \dots, A_n)$: $\sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OM}$ $\forall O \in \mathbb{R}^3$
$\sum \lambda_i \overrightarrow{f(M) f(A_i)} = \sum \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{MA_i}) = \vec{f}(\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}) = \vec{f}(\vec{0}) = 0$.
d'où $\sum \lambda_i f(M) = \sum \lambda_i f(A_i)$ d'où f déterminée par $f(A_i)$
$\sum \lambda_i \neq 0$ car sinon $\sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = 0$ $\forall O \in \mathbb{R}^3$ et donc c'est pas une base.

** $f : \dfrac{\mathrm{Isom}(\Delta_4)}{\mathrm{Isom}^+(\Delta_4)} \longrightarrow \dfrac{\varphi(\mathrm{Isom}\,\Delta_4)}{\varphi(\mathrm{Isom}^+\Delta_4)}$ si $h_1 \mathrm{Isom}^+ = h_2 \mathrm{Isom}^+$ $h_1 h_2^{-1} \in \mathrm{Isom}^+$ d'où $\varphi(h_1 h_2^{-1}) \in \varphi(\mathrm{Isom}^+)$
$h\,\mathrm{Isom}^+ \longmapsto \varphi(h)\varphi(\mathrm{Isom}^+)$ d'où $\varphi(h_1)\varphi(\mathrm{Isom}^+) = \varphi(h_2)\varphi(\mathrm{Isom}^+)$
d'où f est bien définie
f est surjective par construction
si $\varphi(h_1)\varphi(\mathrm{Isom}^+) = \varphi(h_2)\varphi(\mathrm{Isom}^+)$ alors $\varphi(h_1)\varphi(h_2)^{-1} = \varphi(h_1 h_2^{-1}) \in \varphi(\mathrm{Isom}^+)$
Or φ injective d'où $h_1 h_2^{-1} \in \mathrm{Isom}^+$ et donc $h_1 \mathrm{Isom}^+ = h_2 \mathrm{Isom}^+$. donc f injective.
D'où ensembles équipotents.

*** Soit H d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$ alors $\forall g \in \mathfrak{S}_n$ $\bar{g}^2 = 1$ dans $\mathfrak{S}_n/H$ et donc $g^2 \in H$ d'où H contient tous les carrés d'éléments de $\mathfrak{S}_n$. En particulier H contient tous les 3 cycles qui engendrent $\mathcal{A}_n$. d'où $\mathcal{A}_n \subset H$ et par cardinalité, $H = \mathcal{A}_n$
$(i\,j\,k) = (i\,k\,j)^2$ car $\sigma^3 = id \Rightarrow \sigma\sigma^2 = id \Rightarrow \sigma = (\sigma^{-1})^2$

Etape 2 : Le cube C_6

On considère le cube C_6 centré en l'origine O.



On pourrait faire agir les isométries sur l'ensemble des sommets comme on l'a fait pour le tétraèdre mais alors on aurait pas de morphisme surjectif, (d'après le résultat), ce qui compliquera l'étude. Cependant on remarque que les grandes diagonales sont caractérisées par le fait que ce sont les plus gdes distances possibles entre 2 pts du cube. Donc $Isom(C_6)$ agit sur celles ci.
Pour $i \in [\![1,4]\!]$, on note D_i la diagonale (A_i, B_i) et $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces grandes diagonales.
On a donc un morphisme de groupes

$$\varphi : Isom(C_6) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{S}_4$$
$$f \longmapsto f_{|\mathcal{D}}$$

= rotation d'angle π

- φ est surjectif : On considère la symétrie axiale par rapport à (MN) où M est le milieu de $[A_1 A_2]$ et N celui de $[B_1 B_2]$. Cela réalise la transposition. $(1\ 2)$. Similairement, toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$ sont dans l'image de φ, or elles engendrent $\mathfrak{S}_4$ donc φ est surjectif.

- Noyau de φ : Soit $f \in Ker(\varphi)$, $f \neq id$. alors pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $f(D_i) = D_i$.
mais $\exists\, i_0$ tq f échange les sommets de D_{i_0}. Disons, quitte à renommer que $f(A_1) = B_1$ (et donc $f(B_1) = A_1$) alors $f(A_2) \in \{A_2, B_2\}$ mais
$d(f(A_1), f(A_2)) = d(A_1, A_2)$ d'où $f(A_2) = B_2$. En itérant ce procédé, on trouve que f échange les sommets de toutes les grandes diagonales de C_6. d'où $f_{|\mathcal{D}} = s_{0|\mathcal{D}}$ où s_0 est la symétrie par rapport à l'origine.

et (B_3, A_1, B_2, B_4) forme un repère affine de $\mathbb{R}^3$ or une isométrie est déterminée par l'image d'un repère affine d'où $f = s_0$
(ou une isométrie conserve les barycentres et tout point du cube est barycentre des sommets). Réciproquement, $\{id, s_0\} \subset Ker\,\varphi$.
Donc $Ker(\varphi) = \{id, s_0\}$.

D'où $\dfrac{Isom(C_6)}{\{id, s_0\}} \simeq \mathfrak{S}_4$ donc les classes modulo $Ker(\varphi)$ sont de la forme $\{f, s_0 \circ f\}$. Or $\det(s_0 \circ f) = \det s_0 \det f = -\det f$

Donc chaque classe d'équivalence contient exactement un déplacement (et un anti déplacement) ce qui signifie : $\dfrac{Isom(C_6)}{\{id, s_0\}} \simeq Isom^+(C_6)$

d'où $Isom^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$.
Ensuite, $\{id, s_0\} = Ker\,\varphi \triangleleft Isom(C_6)$
$Isom^+(C_6) \triangleleft Isom(C_6)$ car d'indice 2.
$Isom^+(C_6) \cap \{id, s_0\} = \{id\}$.
$|Isom(C_6)| = |Isom^+(C_6)|\,|\langle id, s_0\rangle|$ d'où par caractérisation du produit direct,
$Isom(C_6) \simeq Isom^+(C_6) \times \langle id, s_0 \rangle \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ails supplémentaires :
– On peut donner un "dictionnaire" de l'isomorphisme $G^+ \cong \mathfrak{S}_4$.
  * L'identité . . . Ahem.
  * Les transpositions sont réalisées comme on l'a vu par les retournements d'axes joignant les milieux de deux côtés en passant par O.
  * Les 3–cycles sont réalisés par les rotations d'angle (géométrique) $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'une des diagonales. Par exemple, le 3–cycle $(1\,2\,3)$ (où l'on identifie *naturellement*[2] $\mathfrak{S}_(\mathcal{D})$ à $\mathfrak{S}_4$ via $D_i \mapsto i$) a pour axe D_4.
  * Les 4–cycles correspondent quant à eux aux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour d'un axe orthogonal à 2 faces du cube.
  * Les doubles–transpositions sont réalisés par le carré de l'une des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ ci–dessus.

Au final on a :
▷ 6 axes d'ordre 2 (pour 6 transpositions) ;
▷ 4 axes d'ordre 3 (pour 8 3–cycles : une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et une d'angle $-\frac{2\pi}{3}$) ;
▷ 3 axes d'ordre 4 (pour 6 4–cycles).