UN HOMÉOMORPHISME RÉALISÉ PAR L'EXPONENTIELLE.

13,38

Thème Testard ~~Rombaldi Thèmes pr~~ L'agreg H2G2 T1 N^{elle} édit° p357 dl209 ancienne édit°

Prérequis : thm spectral, codiagonalisabilité.
$\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$, $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})$.
$\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$, exp matricielle est continue
Pour A normale, $|||A|||_2 = \rho(A)$.
unicité de v-a dans compact $\Rightarrow$ cv.

Thm : L'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ / $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ réalise un homéomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$. / $H_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$.

Dém : On fait la preuve pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, celle pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est analogue.

Etape 1 : $\exp : H_n \longrightarrow H_n^{++}$ est bien définie.

Soit $A \in H_n$ alors, par le théorème spectral, il existe $U \in \mathcal{U}(n)$ telle que

$$A = U \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}_{=D} U^* \text{ où les } \lambda_i \text{ sont réels.}$$

à sauter selon leçon

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^k U^*$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = U \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!} U^* \xrightarrow[N\to+\infty]{} U\exp(D)U^* \text{ car } M \mapsto UMU^* \text{ est continue}$$

linéaire en dim finie

donc $\exp(A) = U\exp(D)U^* = U\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})U^* \in H_n$.

Comme $\lambda_i \in \mathbb{R}$, par propriété de l'exponentielle réelle, $e^{\lambda_i} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\exp(A) \in H_n^{++}$.

Etape 2 : Surjectivité.

Soit $A \in H_n^{++}$, alors par théorème spectral, $A = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U^*$ où $U \in \mathcal{U}(n)$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$, on peut prendre son logarithme.

Ainsi, on pose $B = U\,\mathrm{diag}(\log(\lambda_1),\dots,\log(\lambda_n))U^* \in H_n$
et alors, comme avant,

$$A = \exp(B).$$

Etape 3 : Injectivité :

Soient H_1 et H_2 deux matrices hermitiennes telles que $\exp(H_1) = \exp(H_2)$.

- Comme $\exp(H_1) = \lim\limits_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{H_1^k}{k!}}_{\in \mathbb{C}[H_1]}$ et que $\mathbb{C}[H_1]$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dim $< +\infty$ donc fermé,

  on en déduit que $\exp(H_1) \in \mathbb{C}[H_1]$ i.e. $\exp(H_1)$ est un polynôme en H_1.

  Ainsi H_1 commute avec $\exp(H_1) = \exp(H_2)$.

- H_2 est un polynôme en $\exp(H_2)$: en effet, par thm spectral, $H_2 = UDU^*$ où $U \in \mathcal{U}(n)$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

  On choisit R un polynôme (d'interpolat° de Lagrange par exemple) tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $R(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Par injectivité de l'exp réelle, $e^{\lambda_i} = e^{\lambda_j} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j$

Ainsi, $\exp(H_2) = U \,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\, U^*$

et $R(\exp(H_2)) = U R(\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})) U^* = U \,\mathrm{diag}(R(e^{\lambda_1}), \dots, R(e^{\lambda_n}))\, U^*$

$= UDU^* = H_2$.

donc H_2 est un polynôme en $\exp(H_2)$.

- Donc H_1 commute avec $\exp(H_2)$ donc avec H_2. Or H_1 et H_2 sont diagonalisables par thm spectral et ils commutent, ils sont donc codiagonalisables :

il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $H_1 = PD_1P^{-1}$, $H_2 = PD_2P^{-1}$ où D_1 et D_2 sont diagonales réelles. $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $D_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

On a alors $\exp(H_1) = P\exp(D_1)P^{-1}$
$= \exp(H_2) = P\exp(D_2)P^{-1}$ d'où $\exp(D_1) = \exp(D_2)$.

i.e. $\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = \mathrm{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})$ or λ_i, μ_i sont réels donc par injectivité de l'exponentielle réelle, $\lambda_i = \mu_i$ d'où $D_1 = D_2$ d'où $H_1 = H_2$.

Etape 4 : Bicontinuité.

L'exponentielle matricielle est continue, il reste à montrer que la réciproque l'est.

- Soit (B_p) une suite de H_n^{++} qui converge vers $B \in H_n^{++}$. Par surjectivité, on note $B_p = \exp(A_p)$ et $B = \exp(A)$. On veut montrer que $A_p \to A$.

- On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_2$ (on est en dim $< +\infty$, elles sont toutes équivalentes) donc $M_n(\mathbb{C})$ est muni de la norme $|||M|||_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$. Or pour une matrice hermitienne H, $|||H|||_2 = \rho(H)$, où ρ est le rayon spectral. (C'est pour ça qu'on choisit cette norme).

- La suite (B_p) converge donc elle est bornée, or $B_p \in H_n$ donc les valeurs propres de (B_p) sont bornées. Or $B_p \in H_n^{++}$ donc $Sp(B_p) \subset]0, +\infty[$. Ainsi, il existe $M_1 > 0$ telle que $\forall p \geq 0$ $Sp(B_p) \subset]0, M_1]$. $H_n^{++} \subset GL_n$

- Par continuité de $X \mapsto X^{-1}$, $B_p^{-1} \to B^{-1}$ donc de la même manière, il existe $M_2 > 0$ telle que $\forall p \geq 0$ $Sp(B_p^{-1}) \subset]0, M_2]$. Or $Sp(B_p^{-1}) = 1/Sp(B_p)$.

donc $Sp(B_p) \subset [1/M_2, +\infty[$.

D'où $\forall p \geq 0$ $Sp(B_p) \subset [M_0, M_1] \subset]0, +\infty[$

- Or $Sp(A_p) = \ln(Sp(B_p))$ d'où par croissance du log sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\forall p \geq 0$ $Sp(A_p) \subset [\ln(M_0), \ln(M_1)]$. i.e. les valeurs propres de A_p sont bornées.

Or $A_p \in H_n$ donc par prop de $|||\cdot|||_2$, la suite (A_p) est bornée dans H_n.

$\tilde{A} \in H_n$

• Soit $\tilde{A}$ une valeur d'adhérence de (A_p) dans H_n (qui est fermé), alors il existe une sous-suite $(A_{\varphi(p)})$ qui converge vers $\tilde{A}$. On a alors

$$\begin{array}{ccc} \exp(A_{\varphi(p)}) & \longrightarrow & \exp(\tilde{A}) \text{ par continuité de l'exp.} \\ \| & & \\ B_{\varphi(p)} & \longrightarrow & B = \exp(A). \end{array}$$

Donc par unicité de la limite, $\exp(A) = \exp(\tilde{A})$. Or $A, \tilde{A} \in H_n$ donc par injectivité de l'exponentielle sur H_n, $A = \tilde{A}$.

Donc (A_p) est une suite dans un compact qui n'a qu'une valeur d'adhérence, donc elle converge, vers son unique valeur d'adhérence, A. On a donc la continuité séquentielle.

<u>Bonus</u> : Pour A normale, $|||A|||_2 = \rho(A)$.

<u>Dém</u> : A est normale donc se diagonalise en b.o.n. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une telle base.

• Soit $X = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, avec $\|X\|_2 = 1$. On a $Ae_k = \lambda_k e_k$.

d'où $AX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$

d'où $\|AX\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 |\lambda_k|^2 \leq \rho(A)^2 \underbrace{\sum |x_k|^2}_{=1} = \rho(A)^2$ d'où $|||A|||_2 \leq \rho(A)$

• Soit k tel que $\rho(A) = |\lambda_k|$ alors $\rho(A) = |\lambda_k| = \|Ae_k\|_2$ et $\|e_k\|_2 = 1$ d'où $\|A\|_2 = \rho(A)$.