On s'intéresse au caractère borné des solutions de l'équation $y''+qy=0$ (H)

où $q \in \mathcal{C}^0$, π periodique et paire, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Etape 1 : L'équation se réécrit $\underbrace{\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}}_{Y}$ où A est une fonction continue.

~~On peut ap~~ On a les conditions d'applications du thm de Cauchy Lipschitz dans le cas linéaire : On sait que pour toute condition initiale $Y(t_0)=Y_0$, il existe une unique solution globale.

De plus, si on note S_H l'ensemble des solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ de (E),

on a $\dim S_H = 2$. (c'est un sev de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{K})$).

Soit (y_1, y_2) deux solutions associées aux cdit° initiales $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$ et $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$

elles sont indépendantes car $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

donc comme on a m̃ dimension, (y_1,y_2) forme un système fondamental de (H).

Etape 2 : On pose $u : \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ C'est une application
$y \mapsto (x \mapsto y(x+\pi))$

linéaire

De plus, si $y \in S_H$, mq $u(y) \in S_H$:

$\forall x \in \mathbb{R}$ ~~$y(x+\pi)'' + q(x)y(x+\pi$~~

$u(y)''(x) + q(x)\, u(y)(x) \underset{q \text{ est } \pi \text{ periodique}}{=} y''(x+\pi) + q(x+\pi)y(x+\pi) \underset{\text{car } y \in S_H}{=} 0$.

donc $u : S_H \to S_H$

Ainsi on peut définir $A = \mathrm{Mat}_{(y_1,y_2)} u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on note $T = \mathrm{Tr}(A) = a+d$

~~Thm : Si $|T| < 2$ alors toutes~~ 5'40

Etape 3 : Identifier A :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} y_1(x+\pi) \\ y_1'(x+\pi) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} = a\, y_1(x) + b\, y_2(x)$

$y_1'(x+\pi) = a\, y_1'(x) + b\, y_2'(x)$

donc

donc en $x=0$: on trouve $a = y_1(\pi)$ $b = y_1'(\pi)$

et de même en considérant y_2 : $c = y_2(\pi)$ et $d = y_2'(\pi)$.

Étape 4 : y_1 est paire, y_2 impaire et $\det A = 1$

- on pose $z_1 : x \mapsto y_1(-x)$. on mq $z_1 = y_1$

on a, $\forall x \in \mathbb{R}$ $z_1''(x) + q z_1(x) = y_1''(-x) + q(-x) z_1(-x) = 0$ (q est paire ; $y_1 \in S_H$).

donc z_1 est solution de S_H, or $z_1(0) = y_1(0)$
et $z_1'(0) = -y_1'(0) = 0 = y_1'(0)$

donc ~~par unic~~ y_1 et z_1 vérifie le même problème de Cauchy donc par unicité du thm de Cauchy, $y_1 = z_1$

- De même, en considérant $z_2 : x \mapsto -y_2(-x)$, on mq $z_2 = y_2$.

- On note $W : t \mapsto \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ le wronskien de (y_1, y_2)

alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $W(t) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $W'(t) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = 0$ car $y_1, y_2 \in S_H$.

donc W est constante.

donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $W(t) = W(0) = 1$.

or $\det A = W(\pi) = 1$

thm : si $|T| < 2$, toutes les solutions sont bornées
si $|T| = 2$ $\exists$ une solution bornée non nulle.
si $|T| > 2$, toutes les sol° non nulles ne sont pas bornées.
aucune solution non nulle n'est bornée

Étape 5 : ~~le poly~~ On a $\chi_A(X) = X^2 - TX + 1$ de discriminant $\Delta = T^2 - 4$

~~*~~ si $|T| < 2$ alors $\Delta < 0$ donc χ_A a deux vp complexes qui sont conjuguées, distinctes, on les note z et $\bar{z}$ or $z\bar{z} = 1 = |z|^2$ donc $|z| = |\bar{z}| = 1$.

soit (u_1, u_2) une base de vp de A : $\forall x \in \mathbb{R}$ $u_1(x+\pi) = z u_1(x)$
$u_2(x+\pi) = \bar{z} u_2(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ ~~$|u_1|$ et $|u_2|$~~ $|u_i(x+\pi)| = |u_i(x)|$ $i \in \{1, 2\}$

donc $|u_1|$ et $|u_2|$ sont continues, π périodiques donc bornées.

Or tout solution de S_H s'écrit comme cb linéaires de u_1 et u_2 car (u_1, u_2) forme une base de S_H car A diagonalisable sur $\mathbb{C}$

donc toute solution de S_H est bornée.

Si $|T| > 2$ alors χ_A a 2 racines réelles distinctes, r_1 et r_2.

or $r_1 r_2 = 1$ donc $r_2 = 1/r_1$. Quitte à changer de nom on suppose $|r_1| > 1$.

Comme A est diagonalisable, soit (u_1, u_2) une base de $\vec{vp}$ de A de $S_H(H)$

Soit $y \in S_H$ non nulle. alors $y = \alpha u_1 + \beta u_2$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $y(x+n\pi) = \alpha \underbrace{u_1(x+n\pi)}_{r^n u_1(x)} + \beta \underbrace{u_2(x+n\pi)}_{r^{-n} u_2(x)}$

→ si $\alpha \neq 0$, comme $u_1 \neq 0$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $u_1(x_0) \neq 0$

d'où $y(x_0 + n\pi) \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha r^n u_1(x_0)$ qui n'est pas borné car $|r| > 1$.

donc y n'est pas bornée.

→ si $\beta \neq 0$, comme $u_2 \neq 0$ $\exists x_0$ $u_2(x_0) \neq 0$

d'où $y(x_0 + n\pi) \underset{n \to +\infty}{\sim} \beta r^{-n} u_2(x_0)$ non bornée car $|r| > 1$

- si $|T| = 2$ alors χ_A a une racine double : ± 1 (selon signe de T)

donc si u est un $\vec{vp}$ non nulle,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x+\pi) = \pm u(x)$ donc $|u|$ est continue, π périodique donc bornée.