SÉRIES DE HARDY

FGN analyse 1
3.32.

<u>Prérequis:</u> • comparaison des séries à termes positifs, séries de Riemann, une série cv si la suite de ses sommes partielles converge, comparaison série et suite télescopique, transformation d'Abel.
• chgt de variables, TCVD, intégrale généralisée, inégalité des accroissements finis
• Formule de Taylor Young, DL.

On étudie la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n(\alpha) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$

Etape 1: Pour $\alpha > 1$: convergence absolue

on a pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ or $\alpha > 1$ donc par comparaison de séries à termes positifs avec les séries de Riemann, la série converge absolument donc converge.

Etape 2: Pour $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$; convergence.

• On commence par étudier une intégrale: $t \mapsto \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
soit $x \geq 1$

$$\int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt \underset{\substack{\text{chgt de var}\\ u=\sqrt{t}}}{=} 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha}}\,u\,du = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi u)}{u^{2\alpha-1}}\,du.$$

$u' = \sin \pi u$
$v = \frac{1}{u^{2\alpha-1}}$

$$= 2\left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi u^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{x}} - 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\pi}\frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}(2\alpha-1)\,du \quad \text{par IPP}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi(\sqrt{x})^{2\alpha-1}}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\,du$$

Or $\left|\frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\right| \leq \frac{1}{u^{2\alpha}}$ et $2\alpha > 1$ donc par comparaison avec Riemann, on a une dominat° intégrable
Donc par TCVD, $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\,du \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\,du$

Or $\left|\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi(\sqrt{x})^{2\alpha-1}}\right| \leq \frac{1}{\pi(\sqrt{x})^{2\alpha-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ car $2\alpha-1 > 0$

donc $\int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt$ admet une limite quand $x \to +\infty$. donc l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt$

$$= -\frac{2}{\pi} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi u)}{u^{2\alpha}}\,du.$$

• On pose pour $n \geq 1$ $v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt$ alors pour $N \geq 1$, $\sum_{k=1}^{N} v_n = \int_1^{N+1} \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,dt$

donc la suite de ses sommes partielles converge d'après ce qu'on vient de montrer donc $\sum v_n$ converge. Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on va montrer que $\sum (u_n - v_n)$ converge.

On pose $\varphi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$ pour $t \geq 1$, alors

$$|u_n - v_n| = \left|\int_n^{n+1} \varphi(t) - \varphi(n)\,dt\right| \leq \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)|\,dt$$

or φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et $\varphi'(t) = \frac{1}{t^{2\alpha}}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{t}}\cos(\pi\sqrt{t})\,t^\alpha - \sin(\pi\sqrt{t})\,\alpha\, t^{\alpha-1}\right]$

donc $|\varphi'(t)| \leq \frac{1}{t^{2\alpha}}\left[t^{\alpha - 1/2} \times \frac{\pi}{2} + \alpha\, t^{\alpha - 1/2}\right]$ car $\frac{1}{\sqrt{t}} \leq 1$.

$\leq \frac{1}{t^{\alpha + 1/2}} \times K$ où K est une constante.

donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$|\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \sup_{[n,t]} |\varphi'(s)|\,\underbrace{|t-n|}_{\leq 1} \leq \frac{K}{n^{\alpha+1/2}}$$

donc $|v_n - u_n| \leq \int_n^{n+1} \frac{K}{n^{\alpha+1/2}}\,dt = \frac{K}{n^{\alpha+1/2}}$ or $\alpha + \frac{1}{2} > 1$

donc $\sum |v_n - u_n|$ converge par comparaison des séries à termes positifs avec Riemann

donc $\sum (v_n - u_n)$ converge absolument donc converge et donc $\sum u_n$ converge.

Étape 3 : Pour $\alpha = \frac{1}{2}$: divergence.

On commence par déterminer un développement asymptotique de $d_n = e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$

On a $d_n = e^{i\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\pi(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} - 1\right] = e^{i\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right)} - 1\right]$

$= e^{i\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{1+1/n} - 1\right)} - 1\right]$ or $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= e^{i\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\pi\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - 1\right] = e^{i\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)} - 1\right]$

Or $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to+\infty}{O}(x^3)$ en appliquant la formule de Taylor Young à $x \mapsto e^{ix}$.

donc

ici $x = \frac{\pi}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$d_n = e^{i\pi\sqrt{n}}\left[\frac{i\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]$ ← attention le O est complexe maintenant.

On prend la partie réelle :

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\sin(\pi\sqrt{n})\frac{\pi}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2}{8n}\cos(\pi\sqrt{n}) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

si $u_n = m_n v_n$ avec (m_n) bornée et complexe, $v_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors $\mathrm{Re}(u_n) = v_n \times \underbrace{\mathrm{Re}(m_n)}_{\text{bornée}}$

Or $\frac{1}{n^{3/2}}$ est le terme général d'une série convergente par comparaison avec Riemann, donc la série de terme général $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge.

De plus, en faisant de même qu'à l'étape 2, on peut montrer que la série de terme général $\frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ converge.

Ainsi, la serie de terme general u_n est de même nature que la série de terme général $\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})$ qui est de même nature que la suite $(\cos(\pi\sqrt{n}))_{n\geq 0}$. Or cette dernière ne converge pas car la suite extraite $\cos(\pi\sqrt{n^2}) = \cos(\pi n) = (-1)^n$ est divergente.

Donc la série $\sum u_n$ diverge

<u>Etape 4: Pour $\alpha < 1/2$: divergence.</u>

On va démontrer par l'absurde qu'il y a divergence de la série en se ramenant à l'étape 3:

Supposons donc par l'absurde que la série de terme général $u_n(\alpha)$ converge

On note $A_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(\alpha)$ sa somme partielle, pour $n \geq 1$. et $A_0 = 0$.

On va montrer que $\sum u_n(1/2)$ converge. Soit $n \geq 1$, on a (transformat° d'Abel)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{k^\alpha}\,\frac{1}{k^{1/2-\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1})\frac{1}{k^{1/2-\alpha}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^{1/2-\alpha}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^{1/2-\alpha}} = \frac{A_n}{n^{1/2-\alpha}} - \sum_{k=1}^{n-1} A_k\left(\frac{1}{k^{1/2-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1/2-\alpha}}\right)$$

Puisque $\sum u_n(\alpha)$ converge, on sait que (A_n) est bornée (puisqu'elle converge).

donc $\frac{A_n}{n^{1/2-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\frac{1}{2} - \alpha > 0$.

et $$\left| A_k\left(\frac{1}{k^{1/2-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1/2-\alpha}}\right)\right| \leq \max_{k\in\mathbb{N}} |A_k| \underbrace{\left(\frac{1}{k^{1/2-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1/2-\alpha}}\right)}_{\text{terme d'une série convergente car de même nature que la suite } \left(\frac{1}{n^{1/2-\alpha}}\right) \text{ qui converge car } \frac{1}{2}-\alpha>0.}$$

donc le second terme est la somme partielle d'une série absolument convergente donc $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\pi\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right)_{n\geq 1}$ converge. C'est absurde d'après l'étape 3.