B: 15 min

PROLONGEMENT DE LA FONCTION Γ D'EULER

ZQ p313 + OA ex 2.10 p82

Prérequis : théorème d'holomorphie sous le signe intégral, théorème de Fubini, théorème de séries de fonctions méromorphes, critère de Riemann, série entière exp

Déf : La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi plan $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

Prop : La fonction Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$ (en particulier bien définie)

Dém : On va appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral.

Notons $f : z, t \mapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} e^{-t}$

1) • Soit $z \in \mathcal{P}$, $|e^{(z-1)\ln t} e^{-t}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\operatorname{Re} z}}$ intégrable en 0 car $\operatorname{Re} z > 0$ par critère de Riemann

et $|e^{-t} t^{z-1}| \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-t/2})$ par croissances comparées ↖ intégrable en $+\infty$

donc $t \mapsto f(z,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (donc en particulier Γ est bien définie.)

• pour presque tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.

• Soit K un compact de $\mathcal{P}$ alors il existe $r_1, r_2 > 0$ tq

$K \subset \{z \in \mathbb{C}, r_1 \leq \operatorname{Re} z \leq r_2\}$

Soit $z \in K$, $|e^{(z-1)\ln t} e^{-t}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq \begin{cases} e^{-t} t^{r_1 - 1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ e^{-t} t^{r_2 - 1} & \text{si } t > 1 \end{cases} \in L^1(\mathbb{R}^{+*})$

car $r_1, r_2 > 0$ d'après 1)

Donc par théorème d'holomorphie sous le signe intégral, Γ est holomorphe sur $\mathcal{P}$.

But : On veut montrer qu'il existe une fonction F holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction Γ sur $\mathcal{P}$.

Thm : La fonction Γ admet un unique prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$, noté encore Γ. Ce prolongement définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en tout points de $-\mathbb{N}$.

Dém : Etape 1 : $\forall z \in \mathcal{P}$ $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

Soit $z \in \mathcal{P}$, on a $\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$

(On peut découper en deux intégrales car chacune d'elle est définie par 1))

On veut écrire la première intégrale sous forme d'une série

On a $\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$ en développant l'exponentielle en série entière

On veut maintenant permuter $\sum$ et $\int$. On va montrer que $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt < +\infty$

revient au m de mq $\sum \int |\cdot| < +\infty$

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} t^{Re(z)-1} = e^t t^{Re(z)-1}$ qui est bien intégrable sur $[0,1]$

car C^0_{pm} sur $]0,1]$ et intégrable en 0 comme en 1) puisque $Re z > 0$.

donc $t, n \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \in L^1(\lambda \otimes m)$ où λ est la mesure de Lebesgue

et m la mesure de comptage. Donc par thm de Fubini,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\left[\frac{t^{n+z}}{n+z} \right]_0^1}_{\text{car } n+z \neq 0}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

Etape 2 : Montrons que $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe ~~sur~~ $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle l'entier $-n$ qui est simple

- soit K un compact de $\mathbb{C}$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$ tq $K \subset \overline{D}(0, N_K)$. Pour $n > N_K$, g_n n'a pas de pôle dans K.

  Si $z \in K$ $|z+n| \geq ||z|-n| = n - |z| \geq n - N_K$. donc $\forall z \in K$ $|g_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N_K)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

  et donc $\sum_{n > N_K} f_n$ converge normalement sur K, donc uniformément.

Donc par théorème sur les séries de fonctions méromorphes, $\sum g_n = g$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour pôles les entiers négatifs qui sont simples.

Etape 3 : $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On fait de même que dans la démo de la prop, on n'étudie que en $+\infty$ donc on n'a plus besoin de $Re z > 0$.

Etape 4 : Conclusion.

Donc $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$.

D'après le théorème de prolongement analytique, comme $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, c'est le seul prolongement analytique de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

✓ **A l'oral**, bla

✓ Rappel : Une fonction est méromorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ s'il existe un ensemble $\mathcal{P}$ de points isolés de $\mathcal{U}$ (appelés pôles de f) tel que f est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}$ (et si, en tout point $p \in \mathcal{P}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $f(z) \underset{z \to p}{\sim} \frac{b}{(z-p)^n}$).

✓ Rappel : (principe de prolongement analytique) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.

♣ Leonhard Euler (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.