17min X # INVARIANTS DE SIMILITUDE Gourdon p280 (H2G2 Tome 1)

Prérequis : $\mathbb{K}$ corps $\Rightarrow \mathbb{K}[X]$ principal, lemme des noyaux.

Soit E un e.v. sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, $\dim E = n$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note Π_u le polynôme minimal de u.
On note $\Pi_{u,x}$ le polynome minimal de u en x : le polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ de plus bas degré tel que $\Pi_{u,x}(u)(x) = 0$.

Etape 1 : $\Pi_{u,x}$ existe, est unique et $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$. H2G2

On note $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)(x) = 0\}$. C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$ car

⚠ Attention $P \mapsto P(u)(x)$ n'est pas un morphisme d'anneaux !

$\Pi_u \in I_x$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ est principal et donc il existe un unique polynôme unitaire $\Pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ tq $I_x = (\Pi_{u,x})$.

Si $P(u)(x) = 0$ alors $P \in I_x = (\Pi_{u,x})$ donc $\Pi_{u,x} \mid P$. En particulier vrai pour Π_u.

Etape 2 : Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{x,u} = \Pi_u$. H2G2

On décompose Π_u en facteurs irréductibles 2 à 2 distincts.

$\Pi_u = P_1^{m_1} \cdots P_r^{m_r}$ $r \geq 1$, $m_i \geq 1$.

D'après le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i^{m_i}(u))$

On note $K_i = \operatorname{Ker}(P_i^{m_i}(u))$ pour $1 \leq i \leq r$. Comme K_i est stable par u, on peut considérer u_i l'endomorphisme induit par u sur K_i.

Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
Supposons par l'absurde que $\forall x_i \in K_i$, $\Pi_{u_i,x_i} \neq \Pi_{u_i}$

$P_i^{m_i}(u) = 0$ donc $\Pi_{u_i} \mid P_i^{m_i}$

alors Π_{u_i,x_i} divise strictement $\Pi_{u_i} = P_i^{m_i}$? donc $\Pi_{u_i} = P_i^{\alpha_i}$ $\alpha_i \leq m_i$. Si $\alpha_i < m_i$ alors $\dfrac{\Pi_u}{P_i^{m_i - \alpha_i}}$ annule u donc absurde par minimalité de Π_u

Comme P_i est irréductible, on en déduit que $\Pi_{u_i,x_i} \mid P_i^{m_i - 1}$ pour tout x_i.

donc $P_i^{m_i - 1}(u_i) = 0$ sur K_i. C'est absurde par minimalité de Π_{u_i}.
donc il existe $x_i \in K_i$ tq $\Pi_{u_i,x_i} = \Pi_{u_i}$.

Posons $x = x_1 + \dots + x_r$ et vérifions que $\Pi_u = \Pi_{u,x}$.
On a $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$. Montrons que $\Pi_u \mid \Pi_{u,x}$.
On a $\Pi_{u,x}(u)(x) = 0$ d'où

$$0 = \Pi_{u,x}(u)(x) = \underbrace{\Pi_{u,x}(u)(x_1)}_{\in K_1} + \dots + \underbrace{\Pi_{u,x}(u)(x_r)}_{\in K_r} \quad \text{par linéarité.}$$

Or $E = \bigoplus_{i=1}^{r} K_i$ donc pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\Pi_{u,x}(u)(x_i) = 0$
$= \Pi_{u,x}(u_i)(x_i)$.

donc $\Pi_{u_i,x_i} \mid \Pi_{u,x}$. Or $\Pi_{u_i,x_i} = \Pi_{u_i} = P_i^{m_i}$

donc $P_i^{m_i} \mid \Pi_{u,x}$ pour tout i, or ils sont premiers entre eux donc $\Pi_u \mid \Pi_{u,x}$.

D'où l'égalité car ils sont unitaires.

$\dim \mathbb{K}[u].x = \deg \Pi_{u,x}$.

Par déf, $\deg \Pi_{u,x}$ est le plus petit entier k tq $(x, u(x), \dots, u^k(x))$ est liée, i.e. grand $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est libre.

Par récurrence, $\forall m \geq k$, $u^m(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ d'où $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est une base de $\mathbb{K}[u].x$.

Etape 3: Endomorphismes cycliques.

On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tq $E = \mathbb{K}[u](x)$.

On a les Equivalences:
- u est cyclique.
- il existe une base de E tq la matrice de u soit une matrice compagnon
- $\Pi_u = \chi_u$
- $\deg(\Pi_u) = \dim(E)$

1) => 2): Si u est cyclique, il existe $x \in E$ tq $E = \mathbb{K}[u](x)$. La famille $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est generatrice par Cayley Hamilton. Or $\bar{m}$ dimension donc c'est une base. La matrice de u dans cette base est la matrice compagnon C_{Π_u}.
$X^i = Q_i \chi_u + R_i$

2 => 1) On prend le 1er vecteur de la base.

1 => 3: Si x verifie $E = \mathbb{K}[u](x)$, $\deg \Pi_{u,x} = \dim E \,(= \deg \chi_u)$ or $\Pi_{u,x} \mid \chi_u$. d'où $=$.

3 => 1: Soit $x \in E$ tq $\Pi_{u,x} = \Pi_u$, comme $\Pi_u = \chi_u$, $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est de la bonne taille or libre donc base.

3 <=> 4 car $\Pi_u \mid \chi_u$.

Pour $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, la matrice compagnon est $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$

Son polynomôme caractéristique est P.

Place au développement maintenant!

Théorème: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une famille $F_1, \dots, F_r$ de sev de E, stables par u et une unique famille $P_1, \dots, P_r$ de polynômes telles que.
- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
- u_i est cyclique de polynome caractéristique P_i. où $u_i = u_{|F_i}$
- les P_i sont unitaires et $P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_1$

La suite $(P_1, \dots, P_r)$ s'appelle les invariants de similitude de u.

Dém: Existence:

- Si $\Pi_u = \chi_u$ alors u est cyclique et $P_1 = \Pi_u = \chi_u$ convient.

- Sinon, on note k le degré de Π_u. soit $x \in E$ tq $\Pi_u = \Pi_{u,x}$. , $k < n$.

On pose $F = \mathbb{K}[u](x) = \mathrm{Vect}\{u^i(x), i \in \mathbb{N}\}$, on a $\dim F = \deg \Pi_u = k$.
$= \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$.

La famille $e_1 = x, e_2 = u(x), \dots, e_k = u^{k-1}(x)$ forme une base de F. On complète cette base en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

intérêt

On note $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale associée.

cf forme linéaire définie sur E tout entier

On pose $\Gamma = \{ {}^t u^i(e_k^*), i \in \mathbb{N}\} = \{e_k^* \circ u^i, i \in \mathbb{N}\}$.

et $G = \Gamma^\circ$ son orthogonal. $G = \{y \in E, \forall i \; e_k^* \circ u^i(y) = 0\}$.

G est un sev de E.

* G est stable par u : Soit $y \in G$, $e_k^* \circ u^i(u(y)) = e_k^* \circ u^{i+1}(y) = 0$ car $y \in G$.
  ↳ on peut définir u_G l'endomorphisme induit par u sur G.) Ne pas détailler
* On va mq $E = F \oplus G$.

→ $F \cap G = \{0\}$ Soit $y \in F \cap G$.

$y \in F$ donc $y = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k$. car $(e_1, \dots, e_k)$ base de F
$y \in G$ donc $e_k^* \circ u^i(y) = 0$ pour $i \in \mathbb{N}$.

en $i = 0$. $e_k^*(y) = 0$ donc $a_k = 0$.
en $i = 1$, $e_k^*(u(y)) = 0$
$= e_k^*(a_1 e_2 + \dots + a_{k-1} e_k) = a_{k-1}$ donc $a_{k-1} = 0$

⋮

$i = k-1$
donc pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $a_i = 0$ donc $y = 0$.

5'52.

→ $\dim F + \dim G = n$.

On a $G = \Gamma^\circ = \mathrm{Vect}(\Gamma)^\circ$. donc $\dim \Gamma + \dim G = n$.
on va montrer que $\dim \Gamma = k$

On pose $\varphi : \mathbb{K}[u] \longrightarrow \mathrm{Vect}(\Gamma)$ application linéaire.
$g \longmapsto e_k^* \circ g$.

Par définition de Γ, φ est surjective.
Si $e_k^* \circ g = 0$, $g = a_1 id_E + \dots + a_k u^{k-1}$

d'où $0 = \underbrace{e_k^* \circ g(x)}_{e_k^* \circ g(e_1)} = e_k^*(a_1 x + \dots + a_k u^{k-1}(x)) = e_k^*(a_1 e_1 + \dots + a_k e_k) = a_k$.

Puis $e_k^* \circ g(e_i)$ pour i allant de 2 à $k-1$ donne de la même manière, $a_i = 0$
donc $g = 0$.
donc φ est un isomorphisme et donc $\dim(\Gamma) = \dim \mathrm{Vect}(\Gamma) = \dim \mathbb{K}[u] = k$.
$= \deg \pi_u$

Donc $F \oplus G = E$.

On note P_1 le polynome minimal de $u_{|F}$ alors $P_1 \mid \pi_u$ or $\pi_{u,x} \mid P_1$ donc $P_1 = \pi_u$.
$= \pi_u$

On conclut en procédant par récurrence sur la dimension de E.

* si $\dim E = 1$ ok
* si le thm est vrai pour tout endomorphisme sur un e-v. de dimension inférieure à $n-1$
  alors, on applique l'hypothèse de récurrence à u_G ; on obtient $P_2, \dots, P_r$, $F_2, \dots, F_r$ tq

→ $F_2, \dots, F_r$ sont stables par u_G donc par u, et comme $G = F \oplus \dots \oplus F_r$, on obtient
$E = F \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$.
→ u_{G_i} est cyclique de polynôme minimal : P_i.

Or u_F est cyclique de polynôme minimal P_1 car $F = \mathbb{K}[u](x)$
→ $P_r \mid \dots \mid P_2$. Or $P_1 = \pi_u$ et $P_2 = \pi_{u_{F_2}}$ donc $\pi_u(u_{F_2}) = 0$ donc $P_2 \mid \pi_u$

<u>Unicité</u> : Supposons l'existence de deux suites de sous espaces $F_1, \dots, F_r$ et $G_1, \dots, G_s$ qui vérifient les conditions.
avec $P_i = \Pi_{u_{|F_i}}$ $Q_j = \Pi_{u_{|G_j}}$.

On a vu que nécessairement $P_1 = \Pi_u = Q_1$.

soit $j_0 = \min \{k \in \mathbb{N}, P_k \neq Q_k\}$. existe car $\sum \deg P_i = n = \sum \deg Q_i$.

$\forall k \geq j_0$ $P_k \mid P_{j_0}$ donc $P_{j_0}(u)(F_k) = 0$.

Or $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ donc

les sommes sont directes car $P_j(u)(F_i) \subset F_i$

$P_{j_0}(u)(E) = P_{j_0}(u)(F_1) \oplus \dots \oplus P_{j_0}(u)(F_{j_0-1}) \oplus \underbrace{P_{j_0}(u)(F_{j_0})}_{=0} \oplus \underbrace{\dots \oplus P_{j_0}(u)(F_r)}_{= 0}$.

Or pour $i < j_0$ $P_i = Q_i$ (donc les endomorphismes induits par u sur F_i et G_i sont semblables.)
donc $\dim P_{j_0}(u)(F_i) = rg(P_{j_0}(\mathcal{C}(P_i))) \underset{P_i = Q_i}{=} rg(P_{j_0}(\mathcal{C}(Q_i))) = \dim P_{j_0}(u)(G_i)$

donc, comme on a aussi,

$P_{j_0}(u)(E) = \bigoplus_{i=1}^{s} P_{j_0}(u)(G_i)$, en prenant les dimensions, on obtient,

$\dim P_{j_0}(u)(F_1) + \dots + \dim P_{j_0}(u)(F_{j_0-1}) = \dim P_{j_0}(u)(G_1) + \dots + \dim P_{j_0}(u)(G_s)$

d'où $0 = \dim P_{j_0}(u)(G_{j_0}) + \dots + \dim P_{j_0}(u)(G_s)$ donc chacun des termes est nul.

donc $P_{j_0}(u)(G_{j_0}) = \dots = P_{j_0}(u)(G_s) = \{0\}$. donc $Q_{j_0} \mid P_{j_0}$

Or par symétrie, $P_{j_0} \mid Q_{j_0}$ donc $P_{j_0} = Q_{j_0}$. ↯

Donc $r = s$ et $P_i = Q_i$.

14'

voir feuille sur invariants pour avoir des applis + cas concret.