14'36

15'

# INTÉGRALE DE FRESNEL

FGN analyse 3 4.30

**Prérequis:** thm de continuité sous le signe intégrale, TCVD, thm $\mathcal{C}^1$ sous le signe intégral, Comparaison avec Riemann, changement de variables, Fubini,

**Thm:** On va montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i)$. + Faire l'heuristique

**Dém:** On pose pour $t\in\mathbb{R}^+$ $\displaystyle F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}dx$.

**Etape 1:** $F$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, bien défini et $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=0$ et $\displaystyle F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+i}$.

On pose, pour $x,t\in\mathbb{R}^+$, $f(t,x)=\dfrac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}$

* • $f$ est continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$

• $\forall t\in\mathbb{R}^+\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ $|f(t,x)|=\dfrac{e^{-x^2t^2}}{|x^2+i|}\le\dfrac{1}{|x^2+i|}=\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}}_{\text{indépendant de } t}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$

← on compare une fct° $\ge 0$

et par comparaison avec les intégrales de Riemann, la fonction de domination est intégrable en $+\infty$, continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable.

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, $F$ est bien défini et continue sur $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$ aussi en fait

et on a donc $\displaystyle F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+i}dx$.

* On a pour $x\ge0$ $\lim\limits_{t\to+\infty}|f(t,x)|=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2t^2}}{|x^2+i|}=0$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t,x)=0$

On a l'hypothèse de domination donc par TCVD, $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=0$.

**Etape 2:** $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

• ~~$x\mapsto f(t,x)\in L^1(\mathbb{R}^+)$ $\forall t>0$~~

• $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$, de dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial t}:(t,x)\longmapsto -2t\,e^{-(x^2+i)t^2}$

• On va montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ pour $0<a<b$.

$\forall t\in]a,b[$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$ $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|=\left|-2t\,e^{-(x^2+i)t^2}\right|=2t\,e^{-x^2t^2}\le\underbrace{2b\,e^{-a^2x^2}}_{\text{indép de } t}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

intérêt de $a\neq0$, $x\neq0$

par comparaison avec les intégrales de Riemann, la fonction de domination est intégrable en $+\infty$, or elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Donc par thm de classe $\mathcal{C}^1$ sous le signe intégral, $F$ est $\mathcal{C}^1(]a,b[)$ donc $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car c'est une propriété locale.

Et de plus, pour $t>0$ $F'(t) = -2t e^{-it^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2} dx = -2e^{-it^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = -\sqrt{\pi}\, e^{-it^2}$

en effectuant le changement de variable $y = xt$ (qui est un $C^1$ difféo de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ car $t \neq 0$)

La dernière égalité provient du calcul de l'intégrale de Gauss (cf fin).

Étape 3 : $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ est une intégrale convergente et valeur.

thm fondamental de l'analyse

- $\int_\varepsilon^x F'(t)dt = F(x) - F(\varepsilon)$ admet une limite finie en $+\infty$ donc l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} F'(t)dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} F'(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x F'(t)dt$ et $\varepsilon \to 0$ par continuité de $F$ en $0$.

$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+i} dx$ d'après l'étape 1

donc $\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2-i}{x^4+1} dx$.

- Il reste à calculer cette intégrale : on va calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$

Les deux intégrales existent : on a des fractions rationnelles sans pôle réel de degré $-2$ et $-4$ qui sont des $O_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+1/y^4} \frac{dy}{y^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy = J$$

par changement de variable $y = 1/x$ ($C^1$ et strictement monotone)

donc

$$I = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+1/x^2}{\left(x-1/x\right)^2+2} dx$$

Or $\varphi : x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est un $C^1$ difféo de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ (car $\lim_{t\to0} \varphi(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ et $\varphi$ continue) car $\varphi' \neq 0$, $\varphi$ strictement croissante donc injective.

Donc

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2+2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{donc } I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (1-i) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1-i)$

D'où en passant au conjugué, $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1+i)$.

× Calcul de l'intégrale de Gauss.

$x \mapsto e^{-x^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$ et $e^{-x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ existe.

On a $\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\,dy$ par théorème de Fubini-Tonelli

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx\right)^2$$

Or $\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{\mathbb{R}^+}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$ par changement de variables $\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$ de jacobien $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ car l'intégrale est positive.

× Intégrale de Fresnel : c'est l'exemple d'une intégrale convergente tq l'intégrande ne tende pas vers 0.

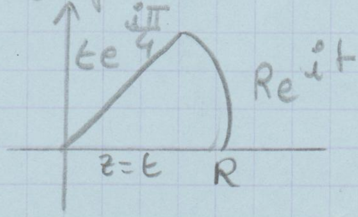
intégrale impropre introduite par le physicien français Augustin Fresnels

On peut aussi utiliser les intégrales complexes :

$f(z) = \exp(-z^2)$ sur le contour

et après on fait $R \to +\infty$

(cf wikipedia)




Thm fondamental de l'analyse :