Prérequis : théorème de prolongement des applications linéaires continues, théorème d'inversion. $\mathcal{F}(L^1) \subset \mathcal{C}_0$, $L^1 * L^1$ existe, $\mathcal{F}(L^1 * L^1) = L^1 \cdot L^1$, $\|f * p_a - f\|_1 \xrightarrow[a \to 0]{} 0$

Thm : La transformation de Fourier $\mathcal{F}$, définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge, de façon unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Convention : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xy} dx$, $y \in \mathbb{R}$.

Dém : On note $A(\mathbb{R}) = \{ f \in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \}$. C'est exactement l'ensemble des fonctions pour lesquelles le théorème d'inversion s'applique :

si $f \in A(\mathbb{R})$, $f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \hat{\hat{f}}(-\cdot)$ où $(\overline{\mathcal{F}}u)(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{2i\pi xy} dx$.

Étape 1 : $\mathcal{F}(A(\mathbb{R})) \subset A(\mathbb{R})$.

Si $f \in A(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

et $\hat{\hat{f}} = f(-\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} \in A(\mathbb{R})$

par théorème d'inversion.

Étape 2 : $A(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et si $f \in A(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Soit $f \in A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.
et comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{\hat{f}} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ or $\hat{\hat{f}} = f(-\cdot)$ donc $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.

d'où $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Or si $h \in L^1 \cap L^\infty$ $\int_{\mathbb{R}} |h(x) h(x)| dx \leq \|h\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx$

d'où $\|h\|_2^2 \leq \|h\|_\infty \|h\|_1$ d'où $L^1 \cap L^\infty \subset L^2$.

Donc $A(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ car on avait déjà $A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

5'29

Étape 3 : Si $f \in A(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. ← on a besoin de savoir que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$!

Soit $f \in A(\mathbb{R})$, on a

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{f}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi xy} dy} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(y) e^{2i\pi xy} dy \right) dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2i\pi xy} dx \right)}_{\substack{= f(y) \\ \text{par formule d'inversion}}} dy = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(y) f(y) dy = \|f\|_2^2$$

Fubini ↓

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(x) \overline{f}(y) e^{2i\pi xy}| dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(x) \overline{f}(y)| dx dy \overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \|f\|_1 = \|f\|_1 \|\hat{f}\|_1 < +\infty$$

donc $x, y \mapsto \hat{f}(x) \overline{f}(y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$

Etape 4: $A(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$.

Soit $P(y) = e^{-2\pi|y|}$ alors $P \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|y|} dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-2\pi y} dy < +\infty$

On pose $p = \mathcal{F}P$.

. alors $\displaystyle p(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|y|} e^{-2i\pi xy} dy \underset{z=-y}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|y|} e^{2i\pi xy} dy = \overline{\mathcal{F}}P(x)$

donc $p = \mathcal{F}P = \overline{\mathcal{F}}P$.

- $\displaystyle p(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi y} e^{-2i\pi xy} dy + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi y} e^{-2i\pi xy} dy = \int^{+\infty} e^{-2\pi y(1+ix)} dy + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi y(1-ix)} dy$

$$= \left[\frac{e^{-2\pi y(1+ix)}}{-2\pi(1+ix)} \right]_{y=0}^{y=+\infty} + \left[\frac{e^{2\pi y(1-ix)}}{2\pi(1-ix)} \right]_{y=-\infty}^{y=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+ix)} + \frac{1}{2\pi(1-ix)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$ en multipliant par le conjugué du dénominateur

car $\displaystyle \left| \frac{e^{-2\pi y(1+ix)}}{2\pi(1+ix)} \right| = \left| \frac{e^{-2\pi y}}{2\pi(1+ix)} \right| \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$

On reconnait la densité de la loi de Cauchy.

. donc on a
- $0 \leq p(x) \leq 1$. pour $x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arctan}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- et donc $p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

On pose pour $a > 0$ $p_a(t) = \frac{1}{a} p\left(\frac{t}{a}\right)$. (unité approchée)

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ alors $\|f * p_a - f\|_2 \xrightarrow[a \to 0]{} 0$

De plus
- $f, p_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f * p_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
- $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

et $\hat{p_a}(y) = \hat{p}(ay) = \mathcal{F}\mathcal{F}P(ay) = P(-ay) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
par théorème d'inversion : $P \in \mathcal{L}^1$ et $p \in \mathcal{L}^1$.

donc $\widehat{f * p_a} = \hat{f}\,\hat{p_a} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
car $f \in \mathcal{L}^1$ et $p_a \in \mathcal{L}^1$

donc $f * p_a \in A(\mathbb{R})$.

g'

Etape 5: Théorème de prolongement

On a donc $\mathcal{F} : A(\mathbb{R}) \to A(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ isométrie or $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est complet et $A(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$, qui est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ donc par théorème de prolongement, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en

$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Cela reste une isométrie par densité de $A(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

+ continuité $\|\cdot\|_2$

Étape 6 : Surjectivité de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé : Soit $(y_n) \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ qui converge vers $y \in L^2(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$

$y_n = \mathcal{F}(x_n)$ où $x_n \in L^2(\mathbb{R})$.

(y_n) converge donc est de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ \forall p, q \geq N \quad \|x_p - x_q\| = \|y_p - y_q\| \leq \varepsilon$
isométrie

donc (x_n) est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est complet donc converge vers $x \in L^2(\mathbb{R})$

Or une isométrie est continue donc par unicité de la limite, $y = \mathcal{F}(x)$.

- Par théorème d'inversion, $\mathcal{F}(A(\mathbb{R})) = A(\mathbb{R})$

$f \in A(\mathbb{R}) \quad f = \hat{\hat{f}}(-\cdot) = \mathcal{F}\underbrace{\mathcal{F}f(-\cdot)}_{\in A(\mathbb{R})}$

Or $A(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ donc $\quad A(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(A(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$

Or $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé pour $\|\cdot\|_2$ donc $\quad L^2(\mathbb{R}) = \overline{A(\mathbb{R})} \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$.

Bonus :

- $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$:

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n = f \mathbb{1}_{[-n,n]}$.

alors $f_n \in L^1(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{1}_{[-n,n]}(x)dx \leq \|f\|_2 \|\mathbb{1}_{[-n,n]}\|_2 < +\infty$

et $f_n \in L^2(\mathbb{R})$: $\int |f_n|^2 \leq \int |f|^2 < +\infty$.

De plus, $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ p.p. et $|f_n| \leq |f| \in L^2(\mathbb{R})$ donc par théorème de cv dominée,

$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

- $\boxed{\text{Si } p \in L^1(\mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq 1,\ \int p(t)dt = 1,\ \text{pour } 1 \leq r < +\infty,\ f \in L^r(\mathbb{R}) \text{ alors } f * p_a \in L^r(\mathbb{R}) \text{ et } \|f * p_a - f\|_r \xrightarrow[a \to p]{} 0 \ !}$

Remarques : • On rappelle que pour calculer g_r, il faut compter le nombre de bases possibles. On a donc

$$g_r = \prod_{r=0}^{d-1}(q^d - q^r) = \prod_{r=0}^{d-1} q^r \times \prod_{r=1}^{d}(q^r - 1) = q^{d(d-1)/2}\prod_{r=1}^{d}(q^r - 1).$$

Adapté du travail de Baptiste Huguet.

Unité approchée:

On appelle unité approchée toute famille $p_a \in L^1(\mathbb{R})$, indexée par $a>0$ tq $\int p_a(t)dt = 1$, ~~par ex~~, $p_a(t) = \frac{1}{a}p\left(\frac{t}{a}\right)$ où $p \in L^1$, $0 \leq p \leq 1$ et $\int p(t) = 1$.

Thm: Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tq $0 \leq p \leq 1$, $p \in L^1$ et $\int p = 1$. On pose pour $a>0$ $p_a(t) = \frac{1}{a}p\left(\frac{t}{a}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Alors 1) $\forall g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, $g * p_a(x) \xrightarrow[a\to 0]{} g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Si g est unif conti alors cu.

2) $\forall\ 1 \leq r < +\infty$ $\forall f \in L^r(\mathbb{R})$, $f * p_a \in L^r$ et $\|f * p_a - f\|_r \xrightarrow[a\to 0]{} 0$.

Dém: On a $0 \leq p_a \leq 1/a$ donc $\underline{p_a \in L^\infty}$

$0 \leq p \leq 1$ donc $0 \leq p^s \leq p$. donc si $f \in L^r$ $f * p_a \in \mathcal{C}_0$ car $\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1$

Etape 1: $\int_{\mathbb{R}} p_a(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a}p\left(\frac{t}{a}\right)dt \overset{u=\frac{t}{a}}{=} \int p(t)dt = 1$ donc $\underline{p_a \in L^1(\mathbb{R})}$

1)

Etape 2: Si $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ alors $g \subseteq L^\infty$ donc $g * p_a \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ car $L^\infty * L^1$.

donc $g * p_a$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

$g * p_a(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}} [g(x-t) - g(x)]\, p_a(t)dt$ car $\int p_a = 1$

$= \int_{\mathbb{R}} [g(x-t) - g(x)]\frac{1}{a}p\left(\frac{t}{a}\right)dt = \int_{\mathbb{R}} [g(x-au) - g(x)]\, p(u)\, du$.

$\xrightarrow[a\to 0]{} 0$ par TCVD. car $|g(x-au) - g(x)|\, p(u)| \leq 2\|g\|_\infty |p(u)|$

2) Soit $1 \leq r < +\infty$, soit $f \in L^r$ alors $f * p_a \in \mathcal{C}_0$ (car $L^r * L^s$) donc existe pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f * p_a(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} [f(x-t) - f(x)]\, p_a(t)dt$

$|f * p_a(x) - f(x)| \leq \int |f(x-t) - f(x)|\, p_a(t)dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int |f(x-t) - f(x)|^r p_a(t)dt\right)^{1/r} \times \left(\underbrace{\int p_a}_{=1}\right)^{1/s}$.

$\underbrace{|f(x-t)-f(x)|\, p_a^{1/r}}_{\in L^r} \times \underbrace{p_a^{1/s}}_{\in L^s}$

$\leq |f(x-t) - f(x)|$

Remarques : • On rappelle que pour calculer g_r, il faut compter le nombre de bases possibles. On a donc

$$g_r = \prod_{r=0}^{d-1}(q^d - q^r) = \prod_{r=0}^{d-1} q^r \times \prod_{r=1}^{d}(q^r - 1) = q^{d(d-1)/2} \prod_{r=1}^{d}(q^r - 1).$$

Adapté du travail de Baptiste Huguet.

donc

$$|(f*\rho_a)(x) - f(x)| \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^r \rho_a(t)\,dt\right)^{1/r}$$

d'où par Fubini Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}} |(f*\rho_a)(x) - f(x)|^r dx \le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^r \rho_a(t)\,dt\,dx$$

$$\overset{FT}{\le} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^r dx\right)}_{\|f_t - f\|_r^r} \rho_a(t)\,dt$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} g(-t)\,\rho_a(t)\,dt = g*\rho_a(0) \xrightarrow[a\to\infty]{} g(0) = 0$$

$< +\infty$ donc $f*\rho_a - f \in L^r$ donc $f*\rho_a \in L^r$.

où $g : t \mapsto \|f_{-t} - f\|_r^r$ est continue bornée donc par 1) $|g(t)| \le 2^r \|f\|_r^r$.

Lemme : $T_f : t \mapsto f_t$ est uniformément continue

Dém : On le montre pour $\mathcal{C}_c$ qui est dense dans L^r. soit $\varepsilon > 0$

• si $g \in \mathcal{C}_c$, supp $g \subseteq [-A, A]$, donc g unif continue, donc $\exists \delta > 0$, $|x-y| \le \delta$ $\Rightarrow |g(x) - g(y)| \le \varepsilon'$

~~soit $\delta \le \varepsilon$~~ si $|x-y| < \delta$.

$|u| \le A$ $\quad |u+x-y| \le A$ $\quad -A \le u+x-y \le A$ $\quad \delta \le A$ $\quad u = t-x$ $\quad$ si $-A-x+y \le u \le A-x+y$.

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t-x) - g(t-y)|^r dt = \int_{\mathbb{R}} |g(u) - g(u+x-y)|^r du \le \int_{-A-\delta}^{A+\delta} \underbrace{|g(u) - g(u+x-y)|^r}_{\le \varepsilon' \text{ car } |x-y| \le \delta} du$$

$\le \varepsilon^r$ en choisissant ε' en fct° de A.

donc $\|g_x - g_y\|_r \le \varepsilon$.

• si $f \in L^r$, $\exists g \in \mathcal{C}_c$ tq $\|f - g\|_r \le \varepsilon$. or $\|f_x\| = \|f\|$.

donc si $|x-y| \le \delta$.

$$\|f_x - f_y\| \le \|f_x - g_x\| + \|g_x - g_y\| + \|g_y - f_y\| \le 2\underbrace{\|f-g\|_r}_{\le \varepsilon} + \underbrace{\|g_x - g_y\|}_{\le \varepsilon \text{ par (1)}} \le 3\varepsilon.$$