# FONCTIONS CARACTERISTIQUES DE LA LOI DE CAUCHY ET DE LA LOI NORMALE

Garet de l'intégratº aux probas p220 222

Prérequis - intégration de fonctions complexes, théorème des résidues, fctº méromorphes, théorème d'holomorphie sous le signe intégral, principe de prolongement analytique, critère de Riemann

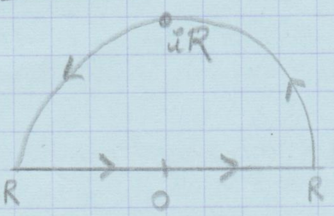
**Thm** = La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a,b)$ est $\phi : t \mapsto e^{iat}e^{-b|t|}$.

Rappel : la densité de $\mathcal{C}(a,b)$ est $x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{b}{(x-a)^2+b^2}$.

Dém : On commence par $X \sim \mathcal{C}(0,1)$

Étape 1 : Calcul par le thm des résidues

Soit $t>0$. Soit $R>1$. On note $f(z)=\frac{e^{itz}}{1+z^2}$ pour $z\in\mathbb{C}$ et on introduit le contour $\gamma_R$ :




Les pôles de $f$ dans $\mathbb{C}$ sont $i$ et $-i$ donc $f$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ étoilé

donc d'après le théorème des résidues, on a ($i,-i \notin \operatorname{Im}\gamma_R$)

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi\Big(\underbrace{\operatorname{ind}_{\gamma_R}(i)}_{=1}\operatorname{Res}(f,i) + \underbrace{\operatorname{ind}_{\gamma_R}(-i)}_{=0 \text{ car } -i \text{ n'est pas à l'interieur de la courbe}}\operatorname{Res}(f,-i)\Big)$$

donc $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f,i)$.

Or $f(z)=\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}$ d'où $(z-i)f(z)=\frac{e^{itz}}{z+i}\xrightarrow[z\to i]{}\frac{e^{-t}}{2i}$

donc pour tout $R>1$ . $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \pi e^{-t}$.

Étape 2 : Calcul par l'intégration sur un chemin.

Par ailleurs, $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz$ où $\mathcal{C}_R : Re^{i\theta}$ $0\le\theta\le\pi$

$$= \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\,d\theta.$$

Soit $\theta\in[0,\pi]$,

$$|f(Re^{i\theta})e^{i\theta}| = \left|\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{1+(Re^{i\theta})^2}\right| = \frac{e^{-tR\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|} \le \frac{1}{R^2-1}$$

car $\begin{cases}\sin\theta\ge 0\\ t>0\end{cases}$ et $\big||R^2|-1\big| \le |1+R^2e^{2i\theta}|$ par I.T. et $R>1$

donc $\left|iR\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta\right| \le R\frac{1}{R^2-1}\times\pi \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

et on a $\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{1+x^2}\,dx.$

par TCVD car $\left|\frac{e^{-itx}}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1$

Etape 3: Conclusion.

On a $\forall R>1$ $\displaystyle \pi e^{-t} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz$ d'où en passant à la limite quand

$R\to+\infty$, $\displaystyle \pi e^{-t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} e^{-itx}\,dx$. donc $\forall t>0$ $\phi(t) = e^{-t} = e^{-|t|}$.

De plus $\phi(0)=1$, et $X$ est symétrique (car $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$) $\leftarrow \mathbb{E}[f(-X)] = \cdots = \mathbb{E}[f(X)]$ $\forall f$ $\mathcal{C}^0$ bornée.

donc si $t<0$ $\phi_X(t) = \phi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{i(-t)X}] = e^{t} = e^{-|t|}$

donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $\phi_X(t) = e^{-|t|}$

Etape 4: Cas $\mathcal{C}(a,b)$. (On ne fait pas sauf à la limite dans leçon de proba)

Si $X\sim\mathcal{C}(0,1)$ alors $Y\sim\mathcal{C}(a,b)$ où $Y=bX+a$.

(En effet $\displaystyle \mathbb{E}[f(bX+a)] = \int_{\mathbb{R}} f(bx+a)\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx \underset{y=bx+a}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{\pi\left(1+\left(\frac{y-a}{b}\right)^2\right)b}\,dy$

$\displaystyle = \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{b}{\pi(b^2+(y-a)^2)}\,dy.$)

donc $\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{it(bX+a)}] = e^{iat}\,\mathbb{E}[e^{itbX}] = e^{iat}e^{-b|t|}$.

Thm: La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est

$t\mapsto \exp(imt)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right)$.

Dém: On commence par $\mathcal{N}(0,1)$.

Etape 1: Théorème d'holomorphie sous le signe intégral sur $D(0,R)$ $\forall R>0$.

Soit $z\in\mathbb{C}$, on pose $f(z,x) = e^{-\frac{x^2}{2}}e^{xz}$ pour $x\in\mathbb{R}$. Soit $R>0$.

- $\forall z\in D(0,R)$ $x\mapsto f(z,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\left|e^{-x^2/2}e^{zx}\right| = e^{-\frac{x^2}{2}}e^{x\,\mathrm{Re}\,z} \leq e^{-\frac{x^2}{2}}e^{|x|R} \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ intégrable par critère de Riemann

- $\forall x\in\mathbb{R}$ $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur $D(0,R)$.
- du premier point, on a vu $\forall z\in D(0,R)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(z,x)| \leq \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}e^{|x|R}}_{\text{indep de } z} \in\mathcal{L}^1$.

donc d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégral,

$G: z\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(z,x)\,dx$ est holomorphe sur $D(0,R)$ $\forall R>0$ donc sur $\mathbb{C}$.

## Etape 2 : Principe de prolongement analytique

Soit $z \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{zx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}} e^{+\frac{z^2}{2}}\,dx = e^{+z^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2}}\,dx}_{=1 \text{ car densité de } \mathcal{N}(z,1)}$$

$$= e^{+z^2/2}.$$

a un pt d'accumulation

Donc pour tout $z \in \mathbb{R}$ $G(z) = e^{+z^2/2}$. or $\mathbb{R}$ ~~est connexe~~, $G$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ouvert connexe -

et $z \mapsto e^{+z^2/2}$ aussi donc par principe du prolongement analytique,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad G(z) = e^{+z^2/2}.$$

En particulier, en $z = it$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx}\,dx = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

12'49 - (sans Etape 4)

## Etape 3 : Cas $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = \sigma X + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (preuve comme pour la loi de Cauchy).

Donc $\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{it(\sigma X + m)}] = e^{imt}\,\mathbb{E}[e^{it\sigma X}] = e^{imt}\,\Phi_X(\sigma t)$

$$= e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$