THÉORÈME DE FEJER

ZO

Prérequis:

Déf: • Pour $N \geq 0$, on pose $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ où $e_k : t \mapsto e^{ikt}$, le noyau de Dirichlet d'ordre N

• Pour $N \geq 1$, on pose $K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$, le noyau de Fejer d'ordre N.

Prop qui vont servir

• $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) = 1$, • $D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2N+1 & \text{sinon} \end{cases}$

• $S_N(f) := \sum_{k=-N}^{N} c_n(f) e_n = f * D_N$. pour $f \in \mathcal{L}^1$, $\forall N \geq 0$.

• $K_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N & \text{sinon} \end{cases}$. donc $K_N \geq 0$.

• $\|K_N\|_1 = 1$ • si $0 < \delta \leq \pi$ $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} K_N(x) dx = 0$.

• $\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) = f * K_N$.

Dém: • $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) = c_0(D_N) = 1$.

• utiliser angle moitié et somme géométrique.

• ok car $c_n(f) e_n = f * e_n$.

• utiliser la formule de K_N puis somme géométriq et angle moitié

• $K_N \geq 0$ donc $\|K_N\|_1 = c_0(K_N)$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{c_0(D_k)}_{=1} = 1.$$

• si $0 < \delta \leq \pi$, alors $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ donc $K_N(x) \leq \frac{1}{N \sin^2(\frac{\delta}{2})}$

d'où le résultat

• $N\sigma_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f * D_k = f * \left(\sum_{k=0}^{N-1} D_k\right) = f * K_N$.

Thm de Fejer: • Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π périodique alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

• Si $f \in \mathcal{L}^p$ $(1 \leq p < \infty)$ 2π-périodique. alors $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Dém: • Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π periodique, alors pour $N \geq 1$.

$|K_N * f(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) [f(x-t) - f(x)] dt \right|$ car $\|K_N\|_1 = 1$ et $K_N \geq 0$.

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt$ car $K_N \geq 0$.

Comme f est continue sur le compact $[-2\pi, 2\pi]$, par théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[-\pi, \pi]$ ~~donc sur $\mathbb{R}$ car f est 2π périodique~~.

donc Il existe $\delta > 0$ $\forall x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ $(*)$.

donc $$|K_N * f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} K_N(t) \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ par } (*)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t) \underbrace{|f(x-t) - f(x)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} dt$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} K_N(t)}_{\substack{\leq \|K_N\|_1 = 1 \\ \text{car } K_N \geq 0}} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t)\, dt \leq \varepsilon + \underbrace{2\|f\|_\infty \times \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t)\, dt}_{\text{indépendant de } x}.$$

donc $$\|K_N * f - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} K_N(t)\, dt$$

donc $\limsup_{N \to +\infty} \|K_N * f - f\|_\infty \leq \varepsilon$ par propriété de K_N.

Donc $\|K_N * f - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

- Si $f \in L^p$ 2π periodique, on a pp en x.

$$|K_N * f(x) - f(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) [f(x-t) - f(x)]\, dt \right|^p.$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p K_N(t)\, dt \times \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\, dt \right)^{p/q}}_{= 1}$$ par Hölder avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

donc

$$\|\sigma_N(f) - f\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) |f(x-t) - f(x)|^p\, dt\, dx.$$

Fubini Tonelli

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p\, dx}_{g(-t)} \Big] dt = \sigma_N(g, 0)$$

où $g : t \mapsto \|f - f(\cdot + t)\|_p^p$ est continue 2π periodique donc par le 1er point du thm,
↳ par 2π-perio de f

$\sigma_N(g, 0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} g(0) = 0$.

ZQ p325

__Justification de la continuité de g :__ Omq si $t_n \in \mathbb{R} \to t$ alors $g(t_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(t)$.

Comme (t_n) cv, il existe $M > 0$ $\forall n \geq 0$ $|t_n| \leq M$.

- Si f est continue à support compact, $\operatorname{supp} f \subset \{|x| \leq R\}$ alors $|f(x) - f(x+t_n)|^p \to |f(x) - f(x+t)|^p$ $\forall x$ par continuité de f.

  et $|f(x) - f(x+t_n)|^p \leq (2 \max_{|x| \leq R+M} |f|)\, 1_{|x| \leq R+M} \in L^1(\mathbb{R})$ donc par TCVD g est continue

- soit $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^p$, par densité de $\mathcal{C}_c^0$ dans L^p, il existe $h \in \mathcal{C}_c^0$ tq $\|f - h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

donc

$$|g(t_n)^{1/p} - g(t)^{1/p}| = \big|\|f - \tau_{t_n} f\|_p - \|f - \tau_t f\|_p\big| \overset{\text{I.T pour } \|\cdot\|_p}{\leq} \|f - \tau_{t_n} f - (f - \tau_t f)\|_p = \|\tau_{t_n} f - \tau_t f\|_p.$$

$$\leq \underbrace{\|\tau_{t_n} f - \tau_{t_n} h\|_p}_{= \|f - h\|_p \leq \varepsilon/3} + \|\tau_{t_n} h - \tau_t h\|_p + \underbrace{\|\tau_t h - \tau_t f\|_p}_{\|h - f\|_p \leq \varepsilon/3} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \underbrace{\|\tau_{t_n - t} \tilde{h} - \tilde{h}\|_p}_{g(t_n - t) \text{ pour } \tilde{h}}$$ où $\tilde{h} = \tau_t h \in \mathcal{C}_c^0$

↳ 0 par 1er cas