N 15"30
B = 14'12

Gourdon p 327

THEOREME DES EXTREMA LIÉS.

Prérequis : • différentielle, Thm des fonctions implicites, dérivation en chaîne
• famille libre, rang de matrice // lignes, colonnes, matrices extraites

Théorème : Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

On pose $\Gamma = \{x \in U,\ g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

On suppose que • $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$.

• les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$$

Dém : **Etape 1 : Réduction du problème.**

dual de $\mathbb{R}^n$

. Nécessairement, $r \leq n$ car $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ forment une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$
. Si $r = n$ alors $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$, on a donc le résultat. $= n = \dim$
On suppose donc $r < n$
Maintenant, on va voir $\mathbb{R}^n$ comme $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$ et $a = (\alpha, \beta)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$.
$(x, y) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-r}, y_1, \dots, y_r)$

Etape 2 : rang et matrice extraite.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-r}}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_{n-r}}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} dg_1(a) \\ \vdots \\ dg_r(a) \end{pmatrix}$$

Comme $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ forme une famille libre la matrice est de rang $\geq r$.

On a égalité d'après les dimensions de la matrice. donc $rg(A) = r$.
On peut donc extraire de A une sous matrice inversible de taille r.

Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que $\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0$ ←

On a $g = (g_1, \dots, g_r)$ d'où la différentielle partielle de g par rapport à y $d_y g(a)$ est inversible.

Etape 3 : Application du théorème des fonctions implicites.

• $\mathbb{R}^{n-r}$, $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^r$ des Banach, U ouvert de $\mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$, $a = (\alpha, \beta) \in U$,
• $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^r)$
• $g(\alpha, \beta) = g(a) = 0$ car $a \in \Gamma$
• $d_y g(a)$ bijection

Donc d'après le théorème des fonctions implicites appliqué à g, il existe

. V un voisinage de α dans $\mathbb{R}^{n-r}$. W un voisinage de β dans $\mathbb{R}^r$. $\varphi \in \mathcal{C}^1(V,W)$ tq
et $V \times W \subset U$.

$$(x \in V, y \in W \text{ et } g(x,y)=0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

8min

Etape 4: Dérivation coordonnées par coordonnées.

On pose $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x,\varphi(x))$

Comme $(\alpha, \varphi(\alpha)) = a$, $h(\alpha) = f(a)$ et comme $\forall x \in V\ (x,\varphi(x)) \in \Gamma$, h admet un extremum local en α.

On a $h(x_1,\dots,x_{n-r}) = f(x_1,\dots,x_{n-r}, \varphi_1(x_1,\dots,x_{n-r}),\dots,\varphi_r(x_1,\dots,x_{n-r}))$ d'où en dérivant coordonnées par coordonnées:

$$\forall 1 \leq i \leq n-r,\quad 0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$$

Par ailleurs, $\forall x \in V$ $g(x,\varphi(x)) = 0$ donc $\forall k \in [\![1,r]\!]$, $g_k(x,\varphi(x)) = 0$ donc en dérivant coordonnées par coordonnées.

$$\forall 1 \leq k \leq r\ \forall 1 \leq i \leq n-r,\quad 0 = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \times \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a)$$

12min.

Etape 5: Rang et conclusion.

$$\text{Soit } M = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n-r}}(a)\ \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \hline A \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{r+1,n}(\mathbb{R}).$$

D'après l'étape 4, les $n-r$ premières colonnes de M sont combinaisons linéaires des r dernières donc $\operatorname{rg} M \leq r$. Or le rang des vecteurs lignes est celui des vecteurs colonnes donc les $r+1$ ~~premières~~ lignes de M forment une famille liée:

$$\exists (\mu_0,\dots,\mu_r) \in \mathbb{R}^{r+1} \setminus \{0\} \text{ tq } \mu_0\, df(a) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i\, dg_i(a) = 0$$

Comme la famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre, $\mu_0 \neq 0$ et en posant $\lambda_i = -\frac{\mu_i}{\mu_0}$ pour $1 \leq i \leq r$, on obtient le résultat.

Appli TEL.

Inégalité arithmetico géometriq :

$n \geq 2$ - $s > 0$ $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \times \dots \times x_n$

$\Gamma = \{(x_1 \dots x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum x_i = s\}$.

f est C^0 sur Γ qui est compact donc $f_{|\Gamma}$ admet un max global en $a \in \Gamma$

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i - s$. $\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0\}$.

$\Omega = \gamma \cap (\mathbb{R}^{+*})^n \subset \Gamma$. $a \in \Omega$ car si $a_i = 0$ alors $f(x) = 0$.
$x \in \gamma \Rightarrow f(x) > 0$.

$f_{|\Omega}$ a extremum global en a sur Ω ouvert de γ donc
$f_{|\gamma}$ a un extremum local en a.

$dg_a(h_1, \dots, h_n) = \sum h_i \neq 0$ donc par thm des extrema liés -
il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $df_a = \lambda dg_a$ donc
$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \lambda$ i.e. $\frac{f(a)}{a_i} = \lambda$.

Or $f(a) \neq 0$ car $a \in \Omega$ donc $a_i = a_j$ $\forall i, j$

or $a \in \gamma$ donc $\sum a_i = s$. donc $a_i = \frac{s}{n}$ $\forall i$

donc $f(a) = \left(\frac{s}{n}\right)^n$. C'est le maximum sur Γ donc
$\forall x_1, \dots, x_n \in \Gamma$ $\prod x_i \leq f(a) = \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^n$.

Diagonalisat° des endomorphismes symétriques :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétriq.

On pose $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$. $g : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, x \rangle$. $S = \{x \in E, g(x) = 1\}$

S est compacte - f continue donc atteint son max sur S en un point e_1.

Or $df(x).h = 2\langle u(x), h \rangle$. $dg(x).h = 2\langle x, h \rangle$.

donc par thm des extrema liés, il existe λ_1 tq
$df(e_1) = \lambda_1 dg(e_1)$. i.e. $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

On pose $F = e_1^\perp$ stable par $u^* = u$ u_F est sym et $\dim F < \dim E - 1$
et on fait par récurrence sur la dimension.

Caractérisation de $SO_n(\mathbb{R})$. $SO_n = \{M \in SL_n$ qui minimise $\sqrt{Tr({}^tMM)}\}$

$SL_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ $\|M\|^2 = \inf_{P \in SL_n} \|P\|^2$.

$f = M \mapsto Tr({}^tMM)$ est continue et coercive donc bone inf atteinte.

- Soit M tq $f(M) = \inf$. alors par extrema liés $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\underbrace{\nabla f(M)}_{2M} = \lambda \underbrace{\nabla g(M)}_{ComM}$. où $g = M \mapsto \det(M) - 1$.

d'où en utilisant $M\,{}^tcomA = I_n$, ${}^tM^{-1} = Com M$.

donc ${}^tMM = \frac{\lambda}{2} Id$. En calculant la trace, $\lambda > 0$.

En calculant det $\lambda^n = 2^n$. donc $\lambda = 2$ ${}^tMM = Id$.

donc $M \in O_n$ or $\det(M) = 1$ donc $M \in SO_n$.

- Récip, si $M \in SO_n$, ${}^tMM = Id$ donc $\|M\|^2 = n$. donc f cste sur SO_n. or f atteint son mini en au moins un pt donc en ts les points