17 min

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR PAR LES SÉRIES DE FOURIER

Oraux X-ENS Analyse 4 ex 1.28

Prérequis : $\mathcal{C}^0$ n $\mathcal{C}^1_{pm}$ $\Rightarrow$ CN de la série de Fourier, somme de sa série de Fourier, dérivation sous le signe intégral, interversion $\sum\int$ sur un segment, equa diff d'ordre 1, Formule de Parseval, TCVD, dérivation sous le signe $\sum$

Thm : Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\mathcal{C}^1_{pm}$ et 2π periodique. Alors il existe une unique fonction $u : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$ et 2π periodique par à x tq

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De plus, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-nt^2} e^{inx}$

où c_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

⚠ écrire $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ et pas $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$

Dém : <u>Analyse</u> : Soit u une solution du problème posé. Soit $t > 0$.

<u>Etape 1 : On écrit tout sous forme de séries de Fourier.</u>

- On a $u_t : x \mapsto u(t,x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier $\mathcal{C}^0$ n $\mathcal{C}^1_{pm}$, de plus elle est 2π periodique donc sa série de Fourier converge normalement et u_t est somme de sa série de Fourier :
pour $x \in \mathbb{R}$ $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx}$ avec $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx}\,dx$.

- De la même manière, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x \mapsto (t,x)$) est somme de sa série de Fourier qui CN.

Or $c_n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t\right) = -n^2 c_n(t)$ (IPP)

donc $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t\right) e^{inx} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t) e^{inx}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- De la même manière, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(\frac{\partial u}{\partial t}, t\right) e^{inx}$ avec CN

où $c_n\left(\frac{\partial u}{\partial t}, t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-inx}\,dx$.

Or
- $x \mapsto u(t,x)e^{-inx}$ est intégrable car $\mathcal{C}^0$ sur un segment car u $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$
- $t \mapsto u(t,x)e^{-inx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car u est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Soit K un compact de $\mathbb{R}^+_*$, $t \in K$, $x \in \mathbb{R}$
$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{inx}\right| \le \underbrace{\max_{t\in K} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|}_{\text{indép de } t}$ intégrable car $\mathcal{C}^0$ sur un segment

donc c_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+_*$ et $c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-inx}\,dx = c_n\left(\frac{\partial u}{\partial t}, t\right)$.

donc $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_n c_n'(t) e^{inx}$.

<u>Etape 2 : Equation différentielle.</u>

Or $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$ donc $0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n'(t) + n^2 c_n(t)] e^{inx}$ $\forall t > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soit $t>0$, cette série CN car les diverses séries de Fourier CN donc on va pouvoir intervertir $\sum$ et $\int$ car l'intégration se fait sur un segment : soit $n_0 \in \mathbb{Z}$.

$$0 = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n'(t) + n^2 c_n(t)] e^{inx} e^{-in_0 x} dx. = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [c_n'(t)+n^2 c_n(t)] \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)x} dx}_{= \delta_{n,n_0} \times 2\pi}$$

$$= 2\pi [c'_{n_0}(t) + n_0^2 c_{n_0}(t)].$$

Donc $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall t > 0$ $c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0$. équation différentielle du 1er ordre

donc $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\exists \alpha_n \in \mathbb{C}$ $\forall t > 0$ $c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$.

Etape 3 : Détermination de α_n. Ne pas faire : juste lire

u_0 est $\mathcal{C}^0$ n $\mathcal{C}^1_{pm}$ et 2π periodique donc somme de sa serie de Fourier qui CN :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ell_n e^{inx}$$

Comme $|u_0 - u_t|^2$ est ~~2π periodique et $\mathcal{C}^0_{pm}$~~, d'après la formule de Parseval,

$$\forall t > 0 \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\ell_n - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 dx$$

$$\text{donc si } n \in \mathbb{Z}, \quad |\ell_n - c_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 dx$$

- $(t,x) \mapsto |u(0,x) - u(t,x)|$ est continue sur le compact $[0,1] \times [0,2\pi]$ donc bornée donc majorée par une fonction intégrable sur $[0,2\pi]$ et indépendante de t.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $|u(0,x) - u(t,x)| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ par continuité de u.

Donc par TCVD, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 dx \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Donc $|\ell_n - c_n(t)| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ donc $\ell_n = \alpha_n$. par continuité de c_n sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ell_n e^{-n^2 t} e^{inx}$.

NB : On peut faire TCVD sur $c_n = \int \dots$ $t \to 0$. de m̂

Etape 4 : Synthèse.

Montrons que $u : (t,x) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ell_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ convient

- $\forall t \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\ell_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |\ell_n|$ or la série de Fourier de u_0 CN donc la série définissant u CN donc u est bien définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
- $(t,x) \mapsto \ell_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ donc comme on a CN, u est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
- $\forall t > 0$ u_t est 2π periodique car $e^{in\cdot}$ l'est.
- Montrons que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Soit $t_0 > 0$.

$\times$ $f_n : (t,x) \mapsto \ell_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.,

$\times$ $\sum f_n(t,x)$ CS car CN

$\times\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall k,\ell\quad \dfrac{\partial^{k+\ell}f(t,x)}{\partial t^k\partial x^\ell} = (in)^\ell(-n^2)^k c_n e^{-n^2t}e^{inx} = i^\ell n^{\ell+2k}(-1)^k c_n e^{-n^2t}e^{inx}$

$\forall t\geq t_0\quad \left|\dfrac{\partial^{k+\ell}f(t,x)}{\partial t^k\partial x^\ell}\right| = \left|n^{\ell+2k}c_n e^{-n^2t}\right| \leq \underbrace{|n|^{\ell+2k}Ke^{-n^2t_0}}_{\text{indép de } t} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc CN donc CU

car $|c_n| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}u_0(x)e^{-inx}dx\right| \leq \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u_0(x)|dx := K.$

Donc par théorème de dérivation sous le signe somme, u admet des dérivées partielles p/r à x et t à tout ordre sur $]t_0,+\infty[$, donc u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]t_0,+\infty[\times\mathbb{R}$, mais t_0 étant arbitraire, u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$

et $\dfrac{\partial^{k+\ell}u(t,x)}{\partial t^k\partial x^\ell} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^\ell n^{\ell+2k}(-1)^k c_n e^{-n^2t}e^{inx}$

- D'où $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 c_n e^{-n^2t}e^{inx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- et $u(0,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = u_0(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Donc u répond au problème posé.

interprétat° physique Li p108
motivat° Li p109.

dans $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int\ldots$

Etap 3: On se place sur $t\in[0,1]$ $\forall$ CVU $t\to 0$: $\lim_{n\to 0} c_n(t) = c_n$

$\lim_{t\to 0} c_n(t) \to c_n$ par $\mathcal{C}^0$

unicité de la limite