ne pas écrire le thm de Dunford **DECOMPOSITION DE DUNFORD** Gourdon Alg p194-195

Prérequis : • projecteurs
• lemme des noyaux, Cayley Hamilton, codiagonalisation

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynome annulateur de f.

$F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
Pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker}\, M_i^{\alpha_i}(f)$.
Alors $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynome en f.

Dém : D'après le lemme des noyaux, $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$.
Etape 1 : Construire les projecteurs comme des polynomes en f
Pour tout i, on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun facteur commun à tous les Q_i) d'où par théorème de Bezout, il existe $U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tq $\sum_{i=1} U_i Q_i = 1$.

On note $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$. On a donc $id = \sum_{i=1}^{s} p_i$ (*)

De plus $\forall j \neq i$ $F \mid Q_i Q_j$ donc

$$p_i \circ p_j = P_i(f) \circ P_j(f) = (U_i(f) \circ Q_i(f)) \circ (U_j(f) \circ Q_j(f))$$ on peut permuter ces polynômes en f

$$= \underbrace{Q_i(f) \circ Q_j(f)}_{=0} \circ U_i(f) \circ U_j(f) = 0$$

En composant (*) par p_i, $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j = p_i^2$ donc $p_i = p_i^2$.

Donc les p_i sont des projecteurs.

Etape 2 : On vérifie qu'ils projettent bien sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$
i.e. $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$, $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

• $\mathrm{Im}\, p_i = N_i = \mathrm{Ker}\, M_i^{\alpha_i}(f)$:

× Soit $y = p_i(x)$, $M_i^{\alpha_i}(f)(p_i(x)) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x)$

$= (M_i^{\alpha_i} U_i Q_i)(f)(x) = (U_i \underbrace{M_i^{\alpha_i} Q_i}_{=F})(f)(x) = U_i(f) \circ F(f)(x) = 0$

× Réciproquement, si $x \in N_i$, $M_i^{\alpha_i}(f)(x) = 0$.

par (*), $x = p_1(x) + \cdots + p_s(x)$

$\forall j \neq i$ $p_j(x) = U_j Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i} \mid Q_j$

d'où $x = p_i(x)$.

• $\ker p_i = \bigoplus_{j\neq i} N_j$:

× si $x \in N_j$ on a vu que $x = p_j(x)$ d'où $p_i(x) = p_i \circ p_j(x) = 0$.

d'où $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \ker p_i$

× Réciproquement, si $x \in \ker p_i$, $x = \sum_{j\neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Im}\, p_j = \bigoplus_{j\neq i} N_j$

8'

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique <u>scindé</u> sur K. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq

$f = d + n$, d diagonalisable, n nilpotent, d et n commutent.

De plus d et n sont des polynômes en f.

Dém : Existence : $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. On applique le lemme avec $F = \chi_f$, d'après le théorème de Cayley Hamilton.

On a $N_i = \ker(f - \lambda_i id)^{\alpha_i}$, $\pi_i = X - \lambda_i$, $p_i = P_i(f)$ projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$

• Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$. Chaque projecteur est diagonalisable ($\to X^2 - X$ polynôme annulateur scindé à racine simple) et ils commutent ils sont donc codiagonalisables. Donc d est diagonalisable.

• On pose $n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i id) p_i$ car $\sum p_i = id$.

Les p_i sont des projecteurs, commutent avec f (comme poly en f) et $\forall i \neq j$ $p_i \circ p_j = 0$. donc on peut mq par récurrence sur q (ou binome de Newton) :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad n^q = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i id)^q p_i \quad \text{(les termes croisés disparaissent)}$$

On prend $q = \underset{i \in [\![1,s]\!]}{\cancel{\sup}\ \max}\ \alpha_i$ alors $(f - \lambda_i id)^q p_i = [(X - \lambda_i)^q P_i](f) = 0$ car $\chi_f \mid (X - \lambda_i)^q P_i$

$P_i = U_i \prod_{j\neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$

donc n est nilpotent d'indice $\leq q$.

• Or d et n sont par construction des polynômes en f donc commutent.

Unicité : Soit (d', n') un autre couple convenant. C'est pas forcément des poly en f

Alors $d - d' = n' - n$. et d' commute avec n' donc avec $d' + n' = f$ donc avec tout polynôme en f. En particulier d' commute avec d. Or d et d' sont diagonalisables, ils sont donc codiagonalisables et donc $d - d'$ est diagonalisable. De même, n et n' commutent. Notons p (resp q) l'indice de nilpotence de n (resp n')

alors $(n' - n)^{p+q} = \sum_{i+j=p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^j n'^j = 0$ donc $n - n'$ est nilpotent.

Or $n' - n = d - d'$ donc nilpotent et diagonalisable donc $n' - n = d - d' = 0$.

14'50