44'37 γ DUAL ET BIDUAL D'UN GROUPE ABÉLIEN FINI Peyré chap 1

Prérequis : • Si G est cyclique d'ordre n, $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
• thm de structure
• prolongement des caractères.

15' 12' pour dual.

DUAL : G sera noté multiplicativement.

→ Cas d'un groupe cyclique :

Prop : Soit $G = \{1, g_0, g_0^2, \dots, g_0^{n-1}\}$ un groupe cyclique de cardinal n et de générateur g_0. Soit ω une racine primitive n^e de l'unité (par exemple $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$).
Les éléments de $\widehat{G}$ sont de la forme

$$\chi_j : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ g = g_0^k & \longmapsto & (\omega^j)^k \end{array} \qquad 0 \leq j \leq n-1.$$

En particulier, $G \simeq \widehat{G}$.

Dém : (synthèse) • Pour $0 \leq j \leq n-1$, les χ_j sont des morphismes de G dans $\mathbb{C}^\times$ donc sont des élts de $\widehat{G}$.

Analyse : • Réciproquement, soit $\chi \in \widehat{G}$. Comme $\forall g \in G$ $g^n = 1$, alors $\forall g \in G$ $\chi(g)^n = \chi(g^n) = \chi(1) = 1$ donc χ est à valeurs dans les racines n^e de l'unité μ_n.

Soit $g \in G$, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tq $g = g_0^k$ d'où $\chi(g) = \chi(g_0^k) = \chi(g_0)^k$ donc il suffit de déterminer $\chi(g_0)$. Or $\chi(g_0) \in \mu_n$ donc il existe $j \in [\![0, n-1]\!]$ tq $\chi(g_0) = \omega^j$.
Donc χ est l'un des χ_j.

• On définit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \widehat{G} \\ k & \longmapsto & \chi_k \end{array}$ en identifiant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $[\![0, n-1]\!]$.

- C'est un morphisme : $\varphi(j+k) = \chi_{j+k} = \chi_j \chi_k = \varphi(j)\varphi(k)$

- D'après ce qu'on a montré, φ est surjective.

- Si $\chi_j = \chi_k$ alors $\omega^j = \chi_j(g_0) = \chi_k(g_0) = \omega^k$ donc $j = k\ [n]$ donc injective.

Donc φ est un isomorphisme : $\widehat{G} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Or G est un groupe cyclique d'ordre n donc $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc $G \simeq \widehat{G}$.

Cet isomorphisme n'est pas canonique : il dépend du choix de ω et de g_0.

Rq : On a donc $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

→ Cas d'un groupe fini commutatif :

Prop : Soit G un groupe fini commutatif alors $G \simeq \widehat{G}$.

Dém : Etape 1 : Si $G \simeq H$ alors $\widehat{G} \simeq \widehat{H}$. G et H deux gpes finis commutatifs

Soit $\psi : G \to H$ un isomorphisme. On définit $\varphi : \widehat{H} \to \widehat{G}$, $\chi \mapsto \chi \circ \psi$.

alors φ est un morphisme et $\widehat{G} \to \widehat{H}$, $\chi \mapsto \chi \circ \psi^{-1}$ est un inverse donc φ est un isomorphisme.

Etape 2 : $\widehat{G \times H} \simeq \widehat{G} \times \widehat{H}$.

On note $i_G : G \to G \times H$, $g \mapsto (g,1)$ et $i_H : H \to G \times H$, $h \mapsto (1,h)$ les injections canoniques.

On pose $\phi : \widehat{G \times H} \to \widehat{G} \times \widehat{H}$, $\chi \mapsto (\chi \circ i_G, \chi \circ i_H)$.

- bonne définition : Si $\chi \in \widehat{G \times H}$: $\chi : G \times H \to \mathbb{C}^\times$ morphisme d'où

$\chi \circ i_G : G \to \mathbb{C}^\times$ est un morphisme comme composée de morphismes donc $\chi \circ i_G \in \widehat{G}$ et de même $\chi \circ i_H \in \widehat{H}$.

- morphisme : Soient $\chi, \xi \in \widehat{G \times H}$,

produit terme à terme

$\phi(\chi \times \xi) = ((\chi \times \xi) \circ i_G, (\chi \times \xi) \circ i_H) = (\chi \circ i_G, \chi \circ i_H) \cdot (\xi \circ i_G, \xi \circ i_H)$.

car $(\chi \times \xi) \circ i_G(g) = \chi \times \xi(g,1) = \chi(g,1)\,\xi(g,1) = \chi \circ i_G(g)\ \xi \circ i_G(g)$

- injectif : Soit $\chi \in \operatorname{Ker} \phi$. alors $\forall g \in G\ \chi(g,1) = 1$, $\forall h \in H\ \chi(1,h) = 1$.

donc $\forall g,h \in G \times H$ $\chi(g,h) = \chi((g,1)(1,h)) \underset{\chi \text{ morphisme}}{=} \chi(g,1)\,\chi(1,h) = 1 \times 1 = 1$

donc $\chi = 1$.

- surjectif : Soient $(\chi_1, \chi_2) \in \widehat{G} \times \widehat{H}$

On définit $\chi : G \times H \to \mathbb{C}^\times$, $(g,h) \mapsto \chi_1(g)\chi_2(h)$ alors χ est un morphisme

$\forall g \in G$ $\chi \circ i_G(g) = \chi(g,1) = \chi_1(g)\underbrace{\chi_2(1)}_{=1} = \chi_1(g)$. Et de même $\chi \circ i_H = \chi_2$

Donc $\phi(\chi) = (\chi_1, \chi_2)$.

Etape 3 : Conclusion avec le cas cyclique.

Par théorème de structure, il existe $N_1, \dots, N_r$ tq $N_r | \cdots | N_1$ tq $G \simeq \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z}$.

donc $\widehat{G} \underset{\text{par étape 1}}{\simeq} \widehat{\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z}} \underset{\text{par étape 2}}{\simeq} \widehat{\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}} \times \dots \times \widehat{\mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z}}$

$\underset{\text{d'après le cas d'un gpe cyclique}}{\simeq} \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z} \simeq G$

Isomorphisme non canonique : dépend de l'isomorphisme du thm de structure et de l'isomorphisme du cas cyclique.

⚠ quel élément d'ordre n_i dans G est envoyé vers $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$.

BIDUAL:

Prolongement des caractères: Soit G un groupe fini commutatif, soit H un sous-groupe de G. Tout caractère χ de H se prolonge en un caractère de G.

Ne pas faire la démo, pas assez de temps -

Dém: On travaille par récurrence sur $[G:H] = |G/H|$ l'indice de H dans G.

- Si $[G:H]=1$, $G=H$. donc c'est bon.
- Si $[G:H]>1$, on suppose le résultat vrai pour tout sg H_1 de G tq $[G:H_1]<[G:H]$.

On a $G \neq H$ donc il existe $x \in G$, $x \notin H$. On pose $K = \langle x, H\rangle$ le sous-groupe engendré par x et H.

$\{k \in \mathbb{Z},\ x^k \in H\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$ car contient $o(x)$ donc c'est un $\mathbb{Z}r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$

- Tout élément $z \in K$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = yx^k$ avec $y \in H$ et $k \in [\![0, r-1]\!]$:
  En effet, si $yx^k = y'x^{k'}$ avec $0 \leq k' \leq k \leq r-1$ on a
  $x^{k-k'} = y'y^{-1} \in H$ et $k-k'<r$ donc $k-k'=0$ par définition de r et donc $y=y'$.
- Analyse: Supposons qu'on ait un prolongement $\tilde{\chi}$ de χ à K. On pose $\zeta = \tilde{\chi}(x) \in \mathbb{C}^*$.

  alors $\zeta^r = \tilde{\chi}(x)^r = \tilde{\chi}(\underbrace{x^r}_{\in H}) = \chi(x^r)$.

  Si $z \in K$, $z = yx^k$ avec $y \in H$ et $0 \leq k \leq r-1$. d'où

  $\tilde{\chi}(z) = \tilde{\chi}(yx^k) = \tilde{\chi}(\underbrace{y}_{\in H})\tilde{\chi}(x^k) = \chi(y)\,\zeta^k$.
- Synthèse: Soit $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tel que $\zeta^r = \chi(x^r)$.

On pose $\tilde{\chi} : \begin{array}{l} K \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ yx^k \longmapsto \chi(y)\zeta^k \end{array}$. On va montrer que $\tilde{\chi} \in \hat{K}$ et que $\tilde{\chi}_{|H} = \chi$.

- Par unicité de la décomposition, la définition n'est pas ambiguë.
- Soient $h = yx^k$ et $h' = y'x^{k'}$

  $\rightarrow$ si $0 \leq k+k' \leq r-1$, $\tilde{\chi}(hh') = \tilde{\chi}(yy'x^{k+k'}) = \chi(yy')\,\zeta^{k+k'} \overset{\chi\text{ morphisme}}{=} \chi(y)\zeta^k\chi(y')\zeta^{k'}$
  $= \tilde{\chi}(h)\tilde{\chi}(h')$

  $\rightarrow$ si $r \leq k+k' \leq 2r-1$, alors $k+k'-r \leq r-1$.

$\tilde{\chi}(hh') = \tilde{\chi}(yy'x^r x^{k+k'-r}) = \chi(yy'x^r)\,\zeta^{k+k'-r} \overset{\chi\text{ morphisme}}{=} \chi(y)\chi(y')\chi(x^r)\,\zeta^{k+k'-r}$.

$= \chi(y)\zeta^k\chi(y')\zeta^{k'}\underbrace{\chi(x^r)\zeta^{-r}}_{=1} = \tilde{\chi}(h)\tilde{\chi}(h')$

Donc $\tilde{\chi} \in \hat{K}$

Par multiplicativité des indices, $[G:H] = [G:K]\underbrace{[K:H]}_{>1}$ donc $[G:K]<[G:H]$

donc par hypothèse de récurrence, on peut prolonger $\tilde{\chi}$ à G -

Prop : Soit G un groupe abélien fini. On a un isomorphisme canonique $G \to \hat{\hat{G}}$ donné par

$$\phi : G \to \hat{\hat{G}}, \quad g \mapsto \left| \begin{array}{l} \hat{G} \to \mathbb{C}^\times \\ \chi \mapsto \chi(g) \end{array} \right.$$

// ressemble à $E \simeq E^{**}$ dans e.v.

Dém : • morphisme de groupes.

$\forall g_1, g_2 \in G \ \forall \chi \in \hat{G} \quad \phi(g_1 g_2)(\chi) = \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2) = (\phi(g_1)\phi(g_2))(\chi)$.

• $G \simeq \hat{G}$ et $\hat{G} \simeq \hat{\hat{G}}$ donc $|G| = |\hat{G}| = |\hat{\hat{G}}|$ donc il suffit de montrer l'injectivité.

• injectivité : Soit $g \in \operatorname{Ker}\phi$: $\forall \chi \in \hat{G}$ $\chi(g) = 1$. On veut montrer que $g = 1$.
Supposons par l'absurde que $g \neq 1$.
Il suffit de trouver $\chi_1 \in \hat{G}$ tel que $\chi_1(g) \neq 1$. pour aboutir à une absurdité

On considère $H = \langle g \rangle$ sous-groupe de G engendré par g.
Comme $g \neq 1$, H est un groupe cyclique de cardinal > 1. donc d'après le cas d'un groupe cyclique pour le dual, on sait construire $\chi_1 \in \hat{H}$ tq $\chi_1(g) \neq 1$.

$H = \{1, g, \dots, g^{n-1}\}$ $\quad \chi_1 : H \to \mathbb{C}^\times, \ g^k \mapsto \omega^k$ alors $\chi_1(g) = \omega \neq 1$ car $\omega \in \mu_n^\times$.

Par prolongement des caractères, χ_1 peut être prolongé en un caractère $\tilde{\chi}_1 : G \to \mathbb{C}^\times$
et on a $\tilde{\chi}_1(g) = \chi_1(g) \neq 1$.

L.

. Si G n'est pas fini, est-ce qu'on garde l'isomorphisme ?