DUAL DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

FGN Alg 1 p329
7.8 + 7.9
+ 7.11

Prérequis : • $|E| = |E^*|$, forme linéaire / hyperplan, F° pour $F \subset E^*$ et dimension.
• $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.
• orbite matrice équivalente

Thm : $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, $A \mapsto f_A : X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$. réalise un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Dém : . On note $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme les espaces sont de même dimension, on peut se contenter de montrer l'injectivité de f.
On remarque que f est linéaire.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $f_A = 0$. alors pour tout $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$,

$$0 = \mathrm{Tr}(A E_{i_0 j_0}) = \sum_{i=1}^n (A E_{i_0 j_0})_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \underbrace{(E_{i_0 j_0})_{k,i}}_{\delta_{k i_0} \delta_{i j_0}} = a_{j_0 i_0}.$$

Ainsi $A = 0$, donc f est injective donc bijective puisque les espaces sont de même dimension.
L.

3'30

On va maintenant caractériser la trace, qui est la forme linéaire la plus connue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Corollaire 1 : Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ tel que pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $g(XY) = g(YX)$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $g(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$.

Dém : Comme $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}^*)$ d'après l'isomorphisme donné par le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $g : X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$.

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathrm{Tr}(AXY) = g(XY) = g(YX) = \mathrm{Tr}(AYX) \underset{\text{par prop de la trace}}{=} \mathrm{Tr}(XAY)$.

donc pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}((AX - XA)Y) = 0$. et donc $f_{AX-XA} = 0$ pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par injectivité de f, on en déduit que $AX = XA$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $A \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Ce qui conclut.
L.

On va maintenant utiliser la correspondance forme linéaire / hyperplan.

6'13

Corollaire 2 : Si $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Dém : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit φ une forme linéaire associée. ($\lambda\varphi$ est aussi associée à H.)
$H = \ker \varphi$.
alors par l'isomorphisme du théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\varphi : X \mapsto \mathrm{Tr}(AX)$.

Pour dire que H rencontre $GL_n(\mathbb{K})$, il nous faut trouver $X \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $\varphi(X) = 0$.

On note $r = rg(A)$ alors A est équivalente à $J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$.

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(X) = Tr(AX) = Tr(PJ_rQX) = Tr(J_rQXP)$.

Si on trouve $Y \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Tr(J_rY) = 0$, on aura gagné, en posant $X = Q^{-1}YP^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

On pose $Y = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\det(Y) = (-1)^{n-1} \neq 0$ donc $Y \in GL_n(\mathbb{K})$

et J_rY est de diagonale nulle donc $Tr(J_rY) = 0$.

Y est la matrice associée à la permutation $(1, 2, \ldots, n)$.

L.
10'19

Corollaire 3 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors.

1) $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $AX + XA = B$

$\iff$ 2) $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $AC + CA = 0 \Rightarrow \underbrace{Tr(BC)}_{f_C(B)} = 0$

Dém :

1 ⇒ 2 : Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC + CA = 0$. Alors

la trace est invariante par conjugaison

$Tr(BC) = Tr((AX + XA)C) = Tr(AXC) + Tr(XAC) = Tr(CAX) + Tr(ACX) = Tr(\underbrace{(CA + AC)}_{=0}X) = 0$

2 ⇒ 1 : On pose $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \mapsto AX + XA$. On note $F = f(\ker h) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$.
$= \{f_C,\ C \text{ tq } AC + CA = 0\}$

1 équivaut à $B \in \operatorname{Im} h$.
2 équivaut à $\forall C \in \ker h$, $f_C(B) = 0$ i.e. $B \in F^\circ$, où F° est l'orthogonal dual de F.

$F^\circ = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \varphi \in F,\ \varphi(B) = 0\}$

En montrant 1 ⇒ 2, on a ainsi montré $\operatorname{Im} h \subset F^\circ$.
Or ces deux espaces ont même dimension, en effet,

$\dim F^\circ = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim F = n^2 - \dim F = n^2 - \dim f(\ker h)$

$= n^2 - \dim \ker h$ car f est un isomorphisme
$= \dim \operatorname{Im} h$ par théorème du rang.

Donc $F^\circ = \operatorname{Im} h$ donc 2 ⇒ 1

14'50