u3'45.

DIFFERENTIELLE DU DETERMINANT ET APPLICATION AU WRONSKIEN.

Rouvière Ex26

Prérequis : • trigonalisation dans $\mathbb{C}$, $A\,{}^t\mathrm{Com}A = \det A\, I_n$
• polynomiale $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$, théorème des fonctions composées.
• formule du déterminant
• deux fct° $\mathcal{C}^0$ qui coïncident sur un ouvert dense coïncident partout.

Prop : $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$.

Dém : × On a $GL_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}), \det(M) \neq 0\}$ or l'application dét est continue car polynomiale or $\mathbb{C}^\times$ est un ouvert donc $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$.

× Soit $Y \in M_n(\mathbb{C})$, (Y est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, $Y = PTP^{-1}$ $P \in GL_n(\mathbb{C})$) on note $\lambda_1, .., \lambda_n$ ses vp.
Les racines de $\det(Y - xI_n)$ sont en nb fini : ce sont les λ_i donc il existe $(\varepsilon_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $\varepsilon_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\varepsilon_k \neq \lambda_i$ i.e. $\det(Y - \varepsilon_k I_n) \neq 0$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Ainsi, les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k I_n$ sont inversibles. Or $X_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Y$ donc $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Thm : On considère $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. On a, pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$ et pour tout $H \in M_n(\mathbb{C})$,
$d(\det)(X)\cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(X)\,H)$.

Dém : On munit $M_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ (toutes équivalentes en dimension finie).

× dét est polynomiale sur $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ donc elle est $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)} \quad \text{pour } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Etape 1 : Calcul de $d(\det)(I_n)$.

Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$, d'après la formule précédente,

$$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(I_n + H)_{1\sigma(1)} \cdots (I_n + H)_{n\sigma(n)}$$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\sigma \neq id$, il existe $k \neq \ell \in [\![1, n]\!]$ tq $\sigma(k) \neq k$ (et donc) $\sigma(\ell) \neq \ell$

et donc $(I_n + H)_{1\sigma(1)} \cdots (I_n + H)_{n\sigma(n)} = \underset{\|H\|\to 0}{O}(\|H\|^2)$ pas besoin de mettre $\|\cdot\|$ de la suite car equivalentes en dim $<+\infty$

d'où
$$\det(I_n + H) = (I_n + H)_{1,1} \cdots (I_n + H)_{n,n} + \underset{H\to 0}{o}(H)$$
$$= 1 + H_{11} + \cdots + H_{nn} + o(H)$$
$$= \det(I_n) + \mathrm{Tr}(H) + o(H)$$

$H \mapsto \mathrm{Tr}(H)$ est linéaire et continue (automatique en dim $<+\infty$)

donc $d(\det)(I_n)\cdot H = \mathrm{Tr}(H)$.

Etape 2 : Calcul de $d(\det)(A)$ pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, soit $H \in M_n(\mathbb{C})$.

On a $\det(A + H) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}H) = \det(A)\,(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}H) + o(H))$

$= \det(A) + Tr(\det A\ A^{-1} H) + o(H) \quad = \det(A) + Tr({}^t Com A\ H) + o(H)$

car $A\,{}^t Com A = \det A\ I_n$

donc $d(\det)(A).H = Tr({}^t Com A\ H)$ linéarité + continuité ok.

Etape 3: Calcul de $d(\det)(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$X \mapsto {}^t Com X$ est continue donc $f : X \mapsto Tr({}^t Com X\,\cdot)$ est continue et $g : X \mapsto d(\det)(X)$. est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Comme f et g coïncident sur $GL_n(\mathbb{C})$ et sont continues et $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles coïncident sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Donc $\forall A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d(\det)(A).H = Tr({}^t Com(A)\ H)$

L

Application: Soient $y_1, \dots, y_n$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ du système $y'(t) = A(t)\,y(t)$ où A est une fonction continue à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $\omega(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ leur déterminant wronskien
Alors $\omega'(t) = Tr(A(t))\,\omega(t)$

Dém: On note $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$

On a $\omega'(t) = (t \mapsto \det(Y(t)))'(t) = d(\det)(Y(t)).Y'(t)$ par thm des fonctions composées.

$= Tr({}^t Com(Y(t))\,Y'(t)) = Tr({}^t Com(Y(t))\,A\,Y(t))$ car y_i solut° du système.

$= Tr(A(t)\underbrace{Y(t)\,{}^t Com(Y(t))}_{\det(Y(t)) I_n})$ car Tr est "circulaire"

invariante par conjugaison

$= Tr(A(t))\det(Y(t))$

Donc $\omega'(t) = Tr(A(t))\,\omega(t)$ donc $\omega(t) = \omega(0)\exp\left(\int_0^t Tr(A(s))\,ds\right)$

soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle comme $A \mapsto {}^t Com A$ est continue,

soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta$ tq si $\|A - B\| < \eta$ alors $\|{}^t Com A - {}^t Com B\| < \varepsilon$.

alors $\psi = A \mapsto (H \mapsto Tr({}^t Com A\ H))$

linéarité trace

$|||\psi(A) - \psi(B)||| = \sup_{H \in \mathbb{R}^n} \frac{|\psi(A)(H) - \psi(B)(H)|}{\|H\|} = \sup_{H \in \mathbb{R}^n} \frac{|Tr(({}^t Com A - {}^t Com B)H)|}{\|H\|}$

or Trace est continue donc il existe $C > 0$ tq
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \|Tr(A)\| \leq C\|A\|$

norme multiplicative.

donc $|||\psi(A) - \psi(B)||| \leq C \sup \frac{\|({}^t Com A - {}^t Com B)H\|}{\|H\|} \leq C\varepsilon \sup \frac{\|H\|}{\|H\|} \leq C\varepsilon$