14min35 **DENSITÉ DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX (BASE HILBERTIENNE)** OA p110 et 140

<u>Prérequis</u> • orthonormalisation de Gram-Schmidt
• Critère de densité
• base hilbertienne, L^2, Cauchy-Schwarz
• transformée de Fourier sur L^1, injectivité
• Théorème d'holomorphie sous le signe intégral, développement en série entière, principe de prolongement analytique

⚠ à la convention de la transformée de Fourier

<u>Déf</u>: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle <u>fonction poids</u> une fonction $p : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive tq $\forall n \in \mathbb{N} \int_I |x|^n p(x)dx < \infty$
($n=0 \Rightarrow p \in L^1(I)$)

On note $L^2(I,p)$ l'espace de fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité p p/r à la mesure de Lebesgue.
On note $\langle f,g\rangle_p = \int_I f(x)\overline{g(x)}p(x)dx$ le produit scalaire associé.

<u>Prop</u>: $L^2(I,p)$ est un espace de Hilbert.
Comme $\mathbb{C}[X] \subset L^2(I,p)$, par orthonormalisation de Gram-Schmidt sur $(X^n)_{n\geq 0}$, il existe une unique famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes unitaires orthonormés pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 2 à 2 tels que $\deg P_n = n$. Cette famille s'appelle la <u>famille des polynômes orthogonaux associés à p</u>.

<u>Théorème</u>: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction poids. Supposons qu'il existe $a>0$ tq $\int_I e^{a|x|^{2\pi}}p(x)dx < \infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à p forment une base hilbertienne de $L^2(I,p)$.

<u>Dém</u>: On sait déjà que la famille $(P_n)_n$ est orthonormée. Il reste à montrer qu'elle est totale i.e $\text{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(P_n)$ est dense dans $L^2(I,p)$.
Comme $L^2(I,p)$ est un Hilbert et que $\text{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(P_n)$ est un sev de $L^2(I,p)$, par critère de densité, il est équivalent de montrer que $\text{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(P_n)^\perp = \{0\}$.

Par construction de (P_n) avec l'algorithme de Gram-Schmidt, on a $\text{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(P_n) = \text{Vect}_{n\in\mathbb{N}}(X^n)$

Il reste donc à montrer que $\text{Vect}(X^n, n\geq 0)^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in L^2(I,p)$, supposons $f \in \text{Vect}(X^n, n\geq 0)^\perp$. (un représentant)
En particulier, en notant $g_n = x \mapsto x^n$ pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\langle f, g_n\rangle_p = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $f = 0$.

Posons $\varphi : x \mapsto f(x)p(x)\mathbb{1}_{x\in I}$ est mesurable car $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

<u>Etape 1</u>: $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Comme $t \leq \frac{1+t^2}{2}$ pour $t \geq 0$, on a $\forall x \in I$ p-p. $|f(x)|p(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)p(x)$ car $p \geq 0$

De plus, $p \in L^1(I)$ et $p|f|^2 \in L^1(I)$ car $f \in L^2(I,p)$

donc $\varphi \in L^1(I)$ donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

$\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ donc on peut considérer sa transformée de Fourier

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)\,p(x)\,e^{-i\omega x 2\pi}\,dx.$$

faire le dessin

Etape 2 : $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a = \{z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{a}{2}\}$

Pour $z \in B_a$ et $x \in I$, on pose $g(z,x) = e^{-izx2\pi} f(x)\,p(x)$ et $\left\{ F(z) = \int_I g(z,x)\,dx. \right.$ ne pas le définir maintenant

Comme $|e^{-izx}| = e^{\mathrm{Im}\,z\, x 2\pi} \underset{\exp \nearrow}{\leq} e^{|\mathrm{Im}\, z||x| 2\pi} \leq e^{\frac{a|x|}{2} 2\pi}$

d'où pour $z \in B_a$ $\displaystyle\int_I |g(z,x)|\,dx \leq \int_I e^{\frac{a|x|}{2}2\pi} |f(x)|\,p(x)\,dx \leq \underbrace{\left(\int_I e^{a|x|2\pi} p(x)\,dx\right)^{1/2}}_{<\infty \text{ par hyp sur } a} \underbrace{\left(\int_I |f(x)|^2 p(x)\,dx\right)^{1/2}}_{<\infty \text{ car } f \in L^2(I,p)}$

par Cauchy-Schwarz sur $L^2(I,p)$

~~définie par ...~~

donc F est bien définie.

De plus,

- $\forall z \in B_a$ $x \mapsto g(z,x)$ est intégrable : on vient de le montrer.
- $\forall x \in I$ $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe : car exp l'est
- $\forall z \in B_a$ $\forall x \in I$ $|g(z,x)| \leq e^{\frac{a|x|}{2}2\pi} |f(x)|\,p(x)$ indépendant de z et intégrable sur I par ce qu'on vient de montrer

d'où par théorème d'holomorphie sous le signe intégral, F est holomorphe sur B_a.
Or F coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui conclut.

Etape 3 : Calcul de $F^{(n)}(0)$ et montrer que $F=0$

Par théorème d'holomorphie, on avait aussi que

$$\forall z \in B_a \quad F^{(n)}(z) = \frac{(-i)^n}{(2\pi)^n} \int_I x^n e^{-izx2\pi} f(x)\,p(x)\,dx \qquad , n \geq 0$$

$0 \in B_a$

$$\text{d'où } F^{(n)}(0) = \frac{\cancel{(-i)^n}}{(-i2\pi)^n} \int_I x^n f(x)\,p(x)\,dx = \frac{\cancel{(-i)^n}}{(-i2\pi)^n} \langle f, g_n \rangle_p = 0 \qquad , n \geq 0.$$

donc par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, $F = 0$ sur un voisinage V de 0. donc par principe du prolongement analytique, $F = 0$ sur B_a, qui est connexe et donc en particulier,

$$\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}} = 0.$$

Comme $\varphi \in L^1$, la transformation de Fourier est un opérateur injectif d'où $\varphi = 0$.

Or p est strictement positif. donc $f = 0$ p.p sur I. Ce qui conclut.

base orthogonale de L^2 !

- Legendre : $I = [-1,1]$, $p(x) = 1$, ex le plus simple de poly orthog ; on peut décomposer certaines fct° en $\sum \lambda_n P_n(x)$.
  intégrat° numérique = méthode de quadrature de Gauss Legendre - $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i)$, x_i zéros de P_n et $\omega_i = \dfrac{-2}{(n+1)P_n'(x_i)P_{n+1}(x_i)}$ → calcul d'intégrale + apparit° en physiq.
  parmi les poly unit$^{\mathbb{R}}$ de deg n, P_n est l'uniq qui fait le min de la $\|T_n\|_2$.
- Hermite : $I = \mathbb{R}$ $p(x) = e^{-x^2}$. apparit° des fonctions d'Hermite Gauss → physiq quantiq et optique
  ↳ forment B-H de vp de $\mathcal{F}$

  interpolation : si $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$, soit $\{x_0, \dots, x_n\}$ pts $\neq$ de $[a,b]$, on construit un polynome de degré minimal tq $P(x_i) = f(x_i)$ $P'(x_i) = f'(x_i)$ ⇝ polynome interpolateur de Hermite.

- Laguerre : $\mathbb{R}^+$ e^{-x} apparaissent en mécaniq quantiq dans la partie radiale de la sol° de l'éq de Schrödinger pour un atome à un électron