Ong - Ne pas écrire le thm - Lemme 1 ou rien

COMPOSANTES CONNEXES DES FORMES QUADRATIQUES NON DÉGÉNÉRÉES RÉELLES

FGN Alg 3 3,23
214
Lemmes : Queffélec Topologie

Prérequis : • base orthogonale pour une forme quadratique, signature, inégalité de Minkowski, classification des formes quadratiques réelles.
• Composantes connexes, connexité de $GL_n^+(\mathbb{R})$, union non disjointe de connexes est connexe
• décomp polaire, thm spectral, réduction endo orthogonaux

Thm : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension $n \geq 1$. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E et $\Omega(E)$ le sous ensemble des formes quadratiques non dégénérées.

Alors $\Omega(E)$ est un ouvert de $Q(E)$ et les composantes connexes de E sont les

$\Omega_k(E) = \{ q \in \Omega(E)$ de signature $(k, n-k) \}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Avant de démontrer le thm, on a besoin de deux lemmes :

Lemme 1 : Si X est un espace topologique, si $X = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$, où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

Dém : Soit $x \in X$, soit $\mathcal{C}(x)$ la composante connexe de x. Si $\mathcal{C}(x) \cap \omega_i \neq \emptyset$ alors $\mathcal{C}(x) \cup \omega_i$ est un connexe contenant x donc $\mathcal{C}(x) \cup \omega_i = \mathcal{C}(x)$ car la composante connexe de x est le plus grand connexe contenant x

Or $\mathcal{C}(x)$ ne peut rencontrer plusieurs ω_i sinon $\mathcal{C}(x) = \bigsqcup \underbrace{\mathcal{C}(x) \cap \omega_i}_{\text{ouverts non vide}}$ ⚡ car $\mathcal{C}(x)$ est connexe.

Donc, comme les (ω_i) recouvrent X, elle en rencontre au moins un, ω_j donc $\mathcal{C}(x) = \omega_j$.

Lemme 2 : $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \ \det A > 0 \}$ est connexe par arcs.

Dém : Soit $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$, on va rejoindre A à I_n.

- Par décomposition polaire, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.
- $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $P^{-1} S P = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}^{+*}$, par thm spectral.
  On pose pour $t \in [0,1]$, $\lambda_i(t) = (1-t) + t\lambda_i$ et $S(t) = P \mathrm{diag}(\lambda_i(t)) P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\lambda_i(t) > 0$.
  Alors $S(0) = I_n$ et $S(1) = S$. et $t \mapsto S(t)$ est continue.
- $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $\det U = 1$ car $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ donc il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1} U Q = \mathrm{diag}(B_i)$ où $B_i = (1)$ ou $B_i = R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ $\theta_i \in \mathbb{R}$.
  -1 est dans R_π

  On pose $B_i(t) = R_{t\theta_i}$ si $B_i = R_{\theta_i}$ et $B_i(t) = 1$ sinon ; $\Delta(t) = \mathrm{diag}(B_i)$

  Puis $U(t) = Q \Delta(t) Q^{-1}$ alors $U(0) = I_n$, $U(1) = U$ et $t \mapsto U(t)$ est continue.
- Finalement, $t \mapsto U(t) S(t)$ est un chemin continu reliant A à I_n dans $GL_n^+(\mathbb{R})$

Dém thm : Étape 1 : $\Omega(E)$ est un ouvert de $Q(E)$

On choisit une base de E, ce qui nous permet d'identifier $Q(E)$ à $S_n(\mathbb{R})$.
Ainsi $\Omega(E)$ s'identifie au sous ensemble formé des matrices symétriques inversibles : $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Or det est continue donc $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert et donc $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

Etape 2: Soit $q \in \mathcal{N}(E)$, alors il existe deux sev F et G supplémentaires et $K > 0$ tq $\forall x \in F \ q(x) \geq K\|x\|^2$
$\forall x \in G \ q(x) \leq -K\|x\|^2$

On note (r, s) la signature de q. Comme q est non dégénérée, on a $r+s=n$.
Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base q-orthogonale alors pour $x = \sum_{i=1} x_i e_i$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{s} b_i x_{i+r}^2 \quad \text{où } a_i > 0 \text{ et } b_i < 0 \quad \text{par définition de la signature}$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$.
Puisque (e_i) est une base, on a $E = F \oplus G$.
De plus $q_{|F}$ est une forme quadratique définie positive et $q_{|G}$ définie négative.

- $q_{|F}$ est définie positive donc $\varphi : x \mapsto \sqrt{q(x)}$ est une norme sur F:

→ si $x \in F$, $q(x) \geq 0$ donc φ est bien définie.
→ I.T est donnée par l'inégalité de Minkowski car $q_{|F}$ est positive.
→ si $\varphi(x) = 0$ alors $q_{|F}(x) = 0$ donc $x = 0$ car $q_{|F}$ est définie

Comme F est de dimension finie, φ est équivalente à $\|\cdot\|_F$ (norme de E restreinte à F)
En particulier, il existe $k_1 > 0$ tq

$$\forall x \in F \quad \varphi(x) = \sqrt{q(x)} \geq k_1\|x\| \text{ et donc } q(x) \geq k_1^2\|x\|^2.$$

- De même $\psi : x \mapsto \sqrt{-q(x)}$ définit une norme sur G et il existe $k_2 > 0$ tq

$$\forall x \in G \quad \sqrt{q(-x)} \geq k_2\|x\| \quad \text{i.e. } q(x) \leq -k_2^2\|x\|^2.$$

Alors $K = \min(k_1^2, k_2^2)$ convient.

Etape 3: Il existe une norme N sur $Q(E)$ tq si $q' \in Q(E)$ vérifie $N(q-q') < K$ alors q' a même signature que q i.e. $\mathcal{N}_n$ est ouvert dans $Q(E)$ donc dans $\mathcal{N}(E)$

Pour $q' \in Q(E)$, on pose $N(q') = \sup_{\|x\|=1} |q'(x)|$. C'est une norme sur $Q(E)$.
On a pour $x \in E$ $x \neq 0$ $\quad |q'(x)| \leq N(q')\|x\|^2 \quad \forall q' \in Q(E)$

Soit $q' \in Q(E)$ tq $N(q-q') < K$ alors $\forall x \neq 0 \quad |q(x) - q'(x)| < K\|x\|^2$.

donc $\forall x \neq 0 \quad -K\|x\|^2 < q(x) - q'(x) < K\|x\|^2$

donc $\forall x \in F \setminus \{0\} \quad q'(x) > q(x) - K\|x\|^2 > 0$ par étape 2
et $\forall x \in G \setminus \{0\}, \quad q'(x) < q(x) + K\|x\|^2 < 0$ "

donc q' est définie positive sur F et définie négative sur G
Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une q'-base orthogonale pour F et $(g_1, \ldots, g_t)$ pour G.
et q est non degenerée sur F et G.
Comme $E = F \oplus G$, on a $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_t)$ base de E q'-orthogonale.

et si $x = \sum_{i=1}^{r} x_i f_i + \sum_{i=1}^{s} y_i g_i$ alors $q'(x) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i y_i^2$ où $\tilde{a}_i > 0$, $\tilde{b}_i < 0$

donc la signature de q' est (r, s)

Etape 4 : Pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\Omega_k(E)$ est connexe par arcs donc connexe

On travaille matriciellement, soient A, B deux matrices symétriques de signature $(k, n-k)$. alors il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPD_kP$ et $B = {}^tQD_kQ$ par classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$, où $D_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$

On peut supposer P et Q de déterminant positif, quitte à échanger en son opposé la 1ère ligne de P ou de Q. (ça change le 1er vecteur de la nouvelle base en son opposé).

Comme $GL_n(\mathbb{R})^+$ est connexe par arcs donc il existe γ un chemin continu de $GL_n(\mathbb{R})^+$ tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$.

Alors $t \mapsto {}^t\gamma(t) D_k \gamma(t)$ est un chemin continu de $\Omega_k(E)$ (par classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$) joignant A à B

Etape 5 : Conclusion

On a montré que les $(\Omega_k(E))$ sont des ouverts pour N de $\Omega(E)$, ils sont connexes et non vides.
Or par thm de Sylvester, ils forment une partition de $\Omega(E)$
Donc par le lemme 1, ce sont les composantes connexes de $\Omega(E)$.

Questions : • Composantes connexes de $Q(E)$? C'est un sev donc il est connexe !!