B 15 min

14'

THEOREME DE CAUCHY LIPSCHITZ GLOBAL

Rouvière ex 60 p 179

Prérequis : • théorème de point fixe
• Si f est continue, $a \in I$ alors $F_a : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est C^1 sur I et $F_a' = f$

Théorème de Cauchy-Lipschitz global : On munit $\mathbb{R}^m$ d'une norme $\|\cdot\|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue et globalement lipschitzienne par rapport à la 2nde variable :

$$\forall K \text{ intervalle compact } \subset I, \exists k > 0 \ \forall t \in K \ \forall y, z \in \mathbb{R}^m \ \|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|.$$

Alors si $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $(*)$ $\forall t \in I$. admet une solution unique qui est définie sur I tout entier.

Dém : 1er cas : On suppose dans un premier temps que I est compact.

Etape 1 : On se ramène à un problème de point fixe.

• Si y est solution de $(*)$ sur I alors y est dérivable sur I. donc continue sur I. Or f est continue donc y' est continue et

$$\forall t \in I \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,ds. \qquad (**)$$

• Réciproquement, si y est continue sur I et vérifie $(**)$ alors y est C^1 donc dérivable sur I et est solution de $(*)$.

Ainsi le problème équivaut à la recherche d'un point fixe de l'application

$$F : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$$
$$y \mapsto \left| F(y) : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,ds. \right.$$

(bien définie) car f est continue.

Etape 2 : On montre que F possède un unique point fixe

• On note k la constante de Lipschitz associée à l'intervalle compact I et $\ell = \sup I - \inf I$ la longueur de I.

• On munit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ de la norme $N_k(y) := \max_{t \in I} \left(e^{-k|t-t_0|} \|y(t)\|\right)$.

On vérifie qu'il s'agit bien d'une norme.

De plus, $\forall y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$, $\quad e^{-k\ell} \|y\|_\infty \leq N_k(y) \leq \|y\|_\infty$. $\quad e^{\cdots} \leq 1$

Ainsi N_k et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$. Or $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ est complet donc $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), N_k)$ l'est aussi.

• Soient $y, z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$, $t \in I$ $t \geq t_0$, on a

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\,ds.$$

d'où $$e^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\,ds$$

$\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k \|y(s)-z(s)\| \, ds.$

$\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k e^{k(s-t_0)} e^{-k(s-t_0)} \|y(s)-z(s)\| \, ds$

$\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k e^{k(s-t_0)} N_k(y-z) \, ds$. $\leq e^{-k(t-t_0)} N_k(y-z) \int_{t_0}^{t} k e^{k(s-t_0)} ds$

$\leq (1-e^{-k(t-t_0)}) N_k(y-z)$.

De même, pour $t \leq t_0$, on a $e^{k(t-t_0)} \|F(y)(t)-F(z)(t)\| \leq (1-e^{-k(t_0-t)}) N_k(y-z)$.

Ainsi pour tout $t \in I$, $e^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t)-F(z)(t)\| \leq (1-e^{-k|t-t_0|}) N_k(y-z)$

Donc, en passant au max sur I, $N_k(F(y)-F(z)) \leq \underbrace{(1-e^{-k\ell})}_{<1} N_k(y-z)$

F est donc contractante sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ muni de la norme N_k, donc par le théorème de point fixe, $(*)$ possède une unique solution.

<u>$2^{ème}$ cas: I un intervalle quelconque.</u>

I peut s'écrire comme réunion croissante d'intervalles compacts $I_0 \subset I_1 \ldots \subset I_j \subset \cdots$ contenant tous le point t_0.

Par ce qu'on a fait au 1^{er} cas, on peut considérer pour tout j la solution y_j de $(*)$ sur I_j.

- Si y est solution de $(*)$ sur I alors $y_{|I_j} = y_j$ $\forall j$ par unicité.
- Réciproquement $y(t) = y_j(t)$ $\forall j$ tq $t \in I_j$ est bien définie (par unicité sur I_j) et donne une unique solution de $(*)$ sur I.

Application: Si en plus f est T periodique: $f(t+T, y) = f(t,y)$ $\forall t \in I$ $\forall y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$

Soit y une solution de $(*)$ sur I. $t_0 = 0$

- $y(0) = y(T)$

$\Leftrightarrow$ • y est T-periodique.

<u>Dém:</u> $2 \Rightarrow 1$ ok.

$1 \Rightarrow 2$. On pose $x(t) = y(T+t)$ alors $x'(t) = y'(t+T) = f(t+T, y(t+T))$
$= f(t, x(t))$

et $x(0) = y(T) = y(0) = y_0$ d'où x est solution de $(*)$ sur I.

Ainsi, par unicité dans le thm de Cauchy Lipschitz global, $y(t+T) = y(t)$ $\forall t \in I$.

i.e. y est T-périodique.

Pour le cas linéaire, remplacer $f(t, y(t))$ par $A(t)y(t) + b(t)$ où A et b sont $\mathcal{C}^0$ sur I à valeurs resp ds $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^m$.

On ne parle plus de "globale lipschitz" ds l'énoncé mais on pose $k = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ i.e. on s'y ramène dans la preuve. Le reste c'est tout pareil.

A $\mathcal{C}^0$ sur le compact I ds le 1^{er} cas