15 min

13' 10.

CARACTÈRES ET SOUS-GROUPES DISTINGUÉS

Ulmer + Peyré

Prérequis : . thm de Lagrange,
. diagonalisat° et polynôme annulateur.
. cas d'égalité dans I-T.

Soit G un groupe fini.

Lemme : "Le noyau d'un caractère est le noyau de la représentation associée".
Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ sur V de dimension d.

Alors $\ker(\rho) = \{g \in G, \chi(g) = \chi(e)\} := \ker \chi$.

⚠ c'est juste une notation.

Dém : On note $n := |G|$, alors par théorème de Lagrange, pour tout $g \in G$ $g^n = e$.
Soit $g \in G$,

$\rho(g)^n = \rho(g^n) = \rho(e) = e$ donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de $\rho(g)$, il est scindé à racines simples, donc $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres $\omega_1, \dots, \omega_d$ sont des racines n-ièmes de l'unité. (donc de module 1)

Ainsi, $\chi(g) = Tr(\rho(g)) = \sum_{j=1}^{d} \omega_j$ donc, $|\chi(g)| \overset{I.T}{\leq} \sum_{j=1}^{d} \underbrace{|\omega_j|}_{=1} = d = \chi(e)$.

Donc $|\chi(g)| = \chi(e) \iff |\sum_{j=1}^{d} \omega_j| = \sum_{j=1}^{d} |\omega_j| \iff \{\exists \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \ \omega_i = \lambda_i \omega_1$ car $\omega_i \neq 0$; $|\sum \omega_j| = \sum |\omega_j|$

↑ cas d'égalité dans l'I.T.

Or les ω_i sont de module 1 $\iff \{\omega_i = \omega_1$; $|\sum \omega_j| = \sum |\omega_j|$

Ainsi, $\chi(g) = \chi(e) \iff d\omega_1 = d$ et $\forall i \ \omega_i = \omega_1 = 1 \iff \rho(g) = id_V \iff g \in \ker \rho$.

Faire que $\Rightarrow$ les réciproques c'est clair = si $\rho(g) = id_V$ alors $g \in \ker \chi$

Thm : Soit G un groupe fini de caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_m$. Alors les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{j \in J} \ker \chi_j$ où $J \subset [\![1, m]\!]$.

Dém : • Soit $J \subset [\![1, m]\!]$, comme $\ker \chi_i = \ker(\rho_i) \triangleleft G$, on a $\bigcap_{i \in J} \ker \chi_i \triangleleft G$.

• Réciproquement, soit $H \triangleleft G$

On commence par construire une représentation associée à H.

On considère l'action par translation à gauche de G sur G/H. Soit χ le caractère associé à la représentation par permutations pour cette action.

$\rho : G \to GL(V)$, $\dim V = |G/H|$,

$\forall g \in G \ \forall g_1 H \in G/H$, $\rho(g)(g_1 H) = g \cdot g_1 H = (g g_1) \cdot H$.

Alors d'après le lemme, $\ker \chi = \ker \rho = \ker \varphi = H$.

déf act° par translat°

où $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{G/H}$ est le morphisme structurel de l'action.

On décompose ensuite V suivant les représentations irréductibles de G : (Maschke)

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \underbrace{V_i \oplus \cdots \oplus V_i}_{a_i \text{ fois}} \quad \text{où } a_i \in \mathbb{N}.$$

où V_i = représentat° irréd de G de caractère χ_i.

On note $J = \{i \in [\![1, m]\!],\ a_i \neq 0\}$. Alors,

$g \in \ker \chi \iff g \in \ker \rho$ par lemme

$\iff \forall i \in J,\ g \in \ker \rho_{|V_i}$ par décomposition en somme directe de V.

$\iff \forall i \in J,\ g \in \ker \chi_i$ par lemme

$\iff g \in \bigcap_{i \in J} \ker \chi_i$.

Donc $H = \ker \chi = \bigcap_{i \in J} \ker \chi_i$.

└.

Corollaire : Un groupe est simple ssi $\forall i \neq 1,\ \forall g \neq e\ \chi_i(g) \neq \chi_i(e)$. (Peyré)
où χ_1 est la représentat° triviale.

Dém : • S'il existe $g \neq e$ et $i \neq 1$ tq $\chi_i(g) = \chi_i(e)$ alors $\ker \chi_i \neq \{e\}$ car $g \neq e$.
et $\ker \chi_i \neq G$ car $i \neq 1$. Or $\ker \chi_i = \ker \rho_i \triangleleft G$. donc G n'est pas simple.

• Réciproquement, si G possède un sg distingué non trivial H alors par thm,

$H = \bigcap_{i \in J} \ker \chi_i$ où $J \subset [\![1, m]\!]$, on a $J \neq \{1\}$ car $H \neq G$.

donc $\forall h \in H,\ \forall i \in J,\ \chi_i(h) = \chi_i(e)$ et en particulier il existe $h \in H \neq \{e\}$
$h \neq e$, et il existe $i \in J$ $i \neq \{1\}$ tel que $\chi_i(h) = \chi_i(e)$.

└.

Si on a le temps, on peut regarder sur un exemple, par ex dans Ulmer à la suite ou la table de $\mathfrak{S}_4$