12min en allant doucement
Faire toutes les réciproques

14'20 avec tout

Théorème de Burnside

Francinou A'2 p'85 et p'111

Déf : Soit G un groupe (dont la loi est notée multiplicativement). On dit que G est d'exposant fini s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall g \in G \quad g^N = e_G$.
Dans ce cas, le plus petit N vérifiant cette propriété est appelé l'exposant de G

Théorème de Burnside : Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors
* G est fini
ssi * G est d'exposant fini.

Dém : * Si G est fini alors d'après le théorème de Lagrange, pour tout $A \in G$
$A^{|G|} = I_n$ donc G est d'exposant fini inférieur ou égal à $|G|$.

* Si G est d'exposant fini $N \in \mathbb{N}^*$. Soit

→ Soit $(M_i)_{1 \le i \le m}$ une base de $Vect(G)$ formée d'éléments de G. (C'est possible car $Vect(G)$ est le sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G, c'est donc en particulier un $\mathbb{C}$-ev de dim finie, comme sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.)

⚠ $Vect(G)$ est additif, G est multiplicatif.

Posons $f : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ A \longmapsto (Tr(AM_i))_{1 \le i \le m} \end{array}$

On va étudier cette fonction qui n'est pas linéaire car G est multiplicatif ! donc on ne peut pas regarder son noyau

Etape 1 : f est injective :

Soit $(A,B) \in G^2$ tq $f(A) = f(B)$ alors par linéarité de la trace,
$Tr(AM) = Tr(BM)$ pour tout $M \in Vect(G)$ et en particulier pour toute matrice de $G \subset Vect(G)$.

On veut montrer $A = B$ i.e $AB^{-1} = I_n$. i.e $\underbrace{AB^{-1}}_{= D} - I_n = 0$. On va mq
$D - I_n$ est nilpotente pour cela on utilise le lemme :

Lemme : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
* M est nilpotente
$\Leftrightarrow$ * $\forall k \in \mathbb{N}^* \; Tr(M^k) = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$Tr((D - I_n)^k) \overset{D \text{ et } I_n \text{ commutent}}{=} Tr\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j D^{k-j}\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j Tr(D^{k-j})$$
par linéarité de la trace.

Or $Tr(D^k) = Tr(A\underbrace{B^{-1}D^{k-1}}_{\in G}) \overset{f(A)=f(B)}{=} Tr(BB^{-1}D^{k-1}) = Tr(D^{k-1}) = \dots = Tr(I) = n$
par réc.

$Tr(AB^{-1}) = Tr(BB^{-1}) = Tr(I_n)$

d'où $Tr((D - I_n)^k) = n \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = n(1-1)^k = 0$.

Donc d'après le lemme $D - I_n$ est nilpotente.

→ Toutes les matrices de G sont annulées par $X^N - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Donc toute matrice de G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Or $D \in G$ d'où D est diagonalisable (et I_n est diagonalisable dans la m base : ~~elle est déjà diagonale~~ c'est une homothétie). Donc $D - I_n$ est diagonalisable.
Or $D - I_n$ est nilpotente. Donc $D - I_n = 0$.

Étape 2 : L'image de f est finie.

On a $\mathrm{Im}(f) \subset X^n$ où $X = \{ Tr(A),\ A \in G \}$

Or les v.p des éléments de G appartiennent à l'ensemble fini des racines N-ièmes de l'unité et la trace est la somme des v.p comptées avec multiplicités.
$|X| \leq N^n$ (N choix pour chaque v.p et n v.p).
d'où $|\mathrm{Im}(f)| < \infty$
et $G \hookrightarrow \mathrm{Im}(f)$ d'où $|G| < \infty$.

Dém lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

* ~~On va procéder par contraposée~~ : Supposons que A n'est pas nilpotente.
Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est trigonalisable.
On note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ ses v.p non nulles complexes distinctes ($r \neq 0$ car M non nilpotente)
On note n_i leurs multiplicités respectives non nulles.

← triangulaire supérieure avec diag =

A est semblable à $T^+(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_r \dots \lambda_r, 0, \dots, 0)$

d'où pour $k \in \mathbb{N}^*$ A^k est semblable à $\tilde{T}^+(\lambda_1^k, \dots, \lambda_r^k, 0, \dots, 0)$.

d'où $Tr(A^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k$

d'où
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tr(A) \\ \vdots \\ Tr(A^r) \end{pmatrix}$$

or $\det M = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \lambda_1 \cdots \lambda_r \neq 0$ (matrices de Vandermonde ou presque)

d'où M est inversible. Si $Tr(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ alors $n_i = 0\ \forall i$ Absurde

* Ce sens ne nous intéresse pas ici mais au cas où pour les questions :
Supposons A nilpotente (d'indice $p \in \mathbb{N}$). Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est trigonalisable or X^n annule A d'où $\pi_A \mid X^n$ d'où $Sp(A) = \{0\}$. ← non vide

d'où A est semblable à $T^+(0, \dots, 0)$ d'où A^k est semblable à $\tilde{T}^+(0, \dots, 0)$
d'où pour tout $k \in \mathbb{N}$ $Tr(A^k) = 0$.

NB : Un gpe infini peut avoir un exposant fini, c'est le cas du gpe additif $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ qui est d'exposant 2. Un célèbre pb posé par Burnside en 1902 demande si un gpe d'exposant fini et de type fini est nécessairement fini. La réponse est négative et un contre-ex a été trouvé seulement en 1975.

Prop : (Déterminant de Vandermonde) Ex 1.10.

Pour $x_1, .., x_n$ des scalaires, on a pour $n \geqslant 2$,

$$V(x_1,..,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Dém : • Si deux des x_i sont égaux, $V(x_1,..,x_n) = 0$ (deux lignes égales). ok.

• Supposons maintenant les x_i deux à deux distincts et posons.

$$P(X) = V(x_1,..,x_{n-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

C'est un polynome en X de degré au plus $n-1$. On développe par rapport à la dernière ligne on constate que le coefficient devant X^{n-1} est $V(x_1,..,x_{n-1})$.

Maintenant, on évalue en x_i, $1 \leq i \leq n-1$, on a deux lignes identiques donc $P(x_i) = 0$ et comme les x_i sont 2 à 2 disjoints, on en déduit que

$\underbrace{\prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)}_{\text{poly unit de deg } n-1} \mid P.$ donc $P(X) = V(x_1,..,x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$

et donc en particulier $V(x_1,..,x_n) = P(x_n) = V(x_1,..,x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$

La formule s'en déduit par récurrence évidente :

• $n = 2$: $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$

• Supposons la formule vraie pour $n-1$: $V(x_1,..,x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$

alors $V(x_1,..,x_n) = V(x_1,...,x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

L.

♣ William BURNSIDE (1852 - 1927) est un mathématicien anglais. Ses premiers travaux en hydrodynamique le conduisent à étudier les fonctions elliptiques, et de là, à se consacrer à partir de 1894 à la théorie des groupes : son livre de 1897 sur la théorie des groupes finis est toujours un classique.

✓ [Merci Floflo] En 1902, William Burnside pose le problème suivant "Est-ce que les groupes de torsion de type fini sont tous finis ?" (c'est le problème de Burnside). Un rappel : un groupe de torsion est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre fini. Par Lagrange, les groupes finis sont de torsion ; mais il existe des groupes infinis qui soient de torsion, comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par exemple. La question de Burnside se réécrit alors "Est ce que les groupes possédant un nombre fini de générateurs et dont tous les éléments sont d'ordre fini sont tous finis ?" Conscient de la difficulté de sa conjecture, il en émet une plus faible, dite "bornée" : "Est-ce que les groupes d'exposant fini possédant un nombre fini de générateurs sont tous finis ?" Remarque : $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion, mais il n'est pas d'exposant fini. En 1905, il démontre que tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini, sans supposer qu'il soit de type fini (c'est ce développement). Un énoncé équivalent est que toute représentation d'un groupe d'exposant fini dans un espace vectoriel complexe de dimension finie est d'image finie. Ceci met en évidence la difficulté de construire un contre-exemple à sa conjecture : il faut, d'après son théorème, qu'un tel groupe n'ait aucune représentation fidèle de degré fini. En 1911, Issai Schur va même plus loin en montrant que tout sous-groupe de torsion de type fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini, donnant un résultat analogue à celui de 1905 pour la version "non-bornée" de la conjecture. C'est en 1964 que la conjecture de Burnside est réfutée pour sa version "non-bornée", puis en 1968 pour la version "bornée". Ces résultats des années 1960 ont apporté des contre-exemples uniquement pour des groupes d'exposant impair ; c'est en 1992 qu'un contre-exemple d'exposant pair a été construit. On sait aujourd'hui construire pour tout entier n impair supérieur ou égal à 665 un groupe infini de type fini et d'exposant n, et on sait qu'il existe un entier n supérieur ou égal à 2^{48} et divisible par 2^9, tel qu'il existe un groupe infini de type fini et d'exposant n. D'autres résultats ont été montré à propos de cette conjecture, mais il reste encore aujourd'hui des problèmes ouverts à ce sujet. En conclusion, l'intérêt du théorème de 1905 est d'avoir apporté une condition nécessaire que doit vérifier un contre-exemple à la conjecture bornée de 1902.

On fait Vandermonde si on a du temps.