228 15 min 14'10. Revoir les étapes

Théorème d'Ascoli

Théorème : Soit (K,d) un e.m compact (→ adapter à I un intervalle de $\mathbb{R}$ compact). Alors les parties relativement compactes de $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ sont exactement les parties bornées (pour $\|\cdot\|_\infty$) et équicontinues.

& mettre en dim finie $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^n)$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$ est <u>équicontinue</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad d(x,y) < \eta_\varepsilon \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A} \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Dém : * Supposons que $\mathcal{A}$ est relativement compacte.

→ $A \subset \bar{A}$ et $\bar{A}$ est compacte donc bornée donc A est bornée.

→ • Soit $\varepsilon > 0$. $\bar{A} \subset \bigcup_{f \in \bar{A}} B(f, \varepsilon)$ or $\bar{A}$ est compacte d'où il existe $f_1, \dots, f_n \in \bar{A}$ tq $\bar{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$.

• Soit $k \in [\![1, m]\!]$, f_k est continue sur le compact K, donc par le thm de Heine, uniformément continue sur K :

il existe $\eta_k > 0$ tq $d(x,y) < \eta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$

Posons $\eta = \min \eta_k$

• Soient x, y tq $|x - y| < \eta$. Soit $f \in \mathcal{A}$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tq $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$ d'où

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)|$$

$$\leq \|f - f_k\|_\varepsilon + \varepsilon + \|f_k - f\|_\varepsilon \quad \text{car } |x - y| < \eta.$$

$$\leq 3\varepsilon.$$

Donc A est équicontinue sur K.

* Réciproquement, supposons que A est bornée et équicontinue.

Soit $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$, Mq $\exists f \in \mathcal{C}(K)$ $\exists n_k$ tq $\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• K est compact donc séparable d'où il existe (x_p) une suite de K dense dans K. A est bornée : $\exists M$ tq $\forall n$ $\|f_n\|_\infty \leq M$. d'où $\forall p, \forall n$ $|f_n(x_p)| \leq M$.

Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$ $\{f_n(x_p), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte ds $\overline{B(0,M)}$. Par le procédé d'extraction diagonale, il existe une sous suite (n_k) tq $\forall p$ $(f_{n_k}(x_p))_k$ converge dans $\mathbb{R}$.

→ Mq (f_{n_k}) est de Cauchy dans $\mathcal{C}(K)$:

Soit $\varepsilon > 0$, • (f_n) est équicontinue sur K (uniformément).

$$\exists \eta_\varepsilon \ d(x,y) < \eta_\varepsilon \Rightarrow \forall n \geq 0 \ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon. \ (*)$$

• $K \subset \bigcup_p B(x_p, \eta_\varepsilon)$ or K est compact d'où il existe $\{c_1, \dots, c_m\} \subset \{x_p, p \geq 0\}$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(c_i, \eta_\varepsilon)$.

• Soit $i \in [\![1, m]\!]$, $(f_{n_k}(c_i))_k$ converge dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc est de Cauchy : $\exists N_i \in \mathbb{N} \quad \forall k' \geq k \geq N_i \quad |f_{n_k}(c_i) - f_{n_{k'}}(c_i)| \leq \varepsilon$. $(**)$

On pose $N = \max\limits_i N_i$

• Soit $x \in K$, soit $i \in [\![1, m]\!]$ tq $|x - c_i| < \eta_\varepsilon$. Pour tout $k, k' \geq N$.

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)| \leq \underbrace{|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(c_i)|}_{(*)} + \underbrace{|f_{n_k}(c_i) - f_{n_{k'}}(c_i)|}_{(**)} + \underbrace{|f_{n_{k'}}(c_i) - f_{n_{k'}}(x)|}_{(*)}$$

$$\leq 3\varepsilon.$$

d'où pour tout $k, k' \geq N$ $\|f_{n_k} - f_{n_{k'}}\|_\infty \leq 3\varepsilon$.

Donc $(f_{n_k})_k$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet donc converge dans $(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty)$.

Ainsi A est relativement compacte.

Procédé d'extraction diagonale : Soit $(X_p, d_p)_{p\geq 1}$ une suite d'e.m. Pour tout $p\geq 1$, soit $(x_{n,p})_{n\geq 1}$ une suite de X_p tq $\{x_{n,p}, n\geq 1\}$ est relativement compact dans X_p. Alors il existe une sous suite (n_k) tq $\forall p\geq 1$ $(x_{n_k,p})_{k\geq 1}$ converge dans X_p.

Dém : • $\{x_{n,1}, n\in\mathbb{N}\}$ est relativement compact dans X_1 donc il existe $\phi_1 : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tq $(x_{\phi_1(n),1})_n$ converge dans X_1.

• $\{x_{\phi_1(n),2}, n\in\mathbb{N}\}\subset\{x_{n,2}, n\in\mathbb{N}\}$ qui est relativement compact dans X_2 donc il existe $\phi_2 : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement $\nearrow$ tq $(x_{\phi_2\circ\phi_1(n),2})_n$ cv dans X_2

On peut réitérer cela et donc $\forall p\geq 0$ $(x_{\underbrace{\phi_1\circ\phi_2\circ\dots\circ\phi_p(n)}_{\psi_p},p})_n$ cv dans X_p.

• On pose $\varphi(n)=\phi_1\circ\phi_2\circ\dots\circ\phi_n(n)$.

$$\varphi(n+1)=\phi_1\circ\phi_2\circ\dots\circ\phi_{n+1}(n+1)\underset{\substack{\uparrow\\ \phi_{n+1}(k)\geq k\ \forall k}}{\geq}\phi_1\circ\phi_2\circ\dots\circ\phi_n(n+1)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{les }\phi_i\text{ sont strict }\nearrow}}{>}\phi_1\circ\phi_2\circ\dots\circ\phi_n(n)=\varphi(n)$$

d'où φ est strictement croissante.

• Soit $p\geq 1$.
On sait que $(x_{\psi_p(n)},p)$ cv dans X_p.

et si $n\geq p$ $(x_{\varphi(n),p})_{n\geq p}$ est une suite extraite de $(x_{\psi_p(n)},p)$ donc converge aussi

car si $n\geq p$ $\underbrace{\psi_n(n)}_{\varphi(n)=}=\phi_1\circ\dots\circ\phi_p\circ\phi_{p+1}\circ\dots\circ\phi_n(n)=\psi_p\circ\phi_{p+1}\circ\dots\circ\phi_n(n)$

donc $(x_{\varphi(n),p})_{n\geq p}$ converge dans X_p.