8

$\frac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY-1)}$ est un anneau principal

Franchou Gianella alg 1.

Prérequis : • anneau principal, thm de Bézout, lemme de Gauss.
• ds un anneau factoriel, irré $\Leftrightarrow$ premier, A fact $\Rightarrow$ A[X] fact
• a premier $\Leftrightarrow$ (a) premier $\Leftrightarrow$ $A/(a)$ intègre
• division euclidienne dans A[X] A anneau quelconque
• PU de l'anneau des polynômes, du quotient,

4'3'10 sans étape 4 → prendre le temps de se retourner
4'5'06 ---

Thm : L'anneau $\frac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY-1)}$ est principal.

Étape 1 : $XY-1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$.

$XY-1$ est non nul et non inversible dans $\mathbb{C}[X,Y]$.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ tels que $XY-1 = PQ$. On va montrer que P ou Q est inversible.

Comme $XY-1$ est unitaire, on peut supposer que P et Q sont aussi unitaires.

Comme $\deg_Y(XY-1) = 1$ alors $(\deg_Y(P), \deg_Y(Q)) \in \{(0,1),(1,0)\}$. Les deux cas sont symétriques

on peut donc supposer que $\deg_Y(P) = 1$ et $\deg_Y(Q) = 0$ donc $Q \in \mathbb{C}[X]$.

On va maintenant raisonner sur $\deg_X$. On a $\deg_X(XY-1) = 1$ ce qui amène deux cas

→ $\deg_X(P) = 1$ et $\deg_X(Q) = 0$: alors $Q \in \mathbb{C}^*$ et donc Q est inversible, on a gagné.

ou → $\deg_X(P) = 0$ et $\deg_X(Q) = 1$ donc $Q = X+a$ $a \in \mathbb{C}$ et $P = Y+b$ $b \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$XY-1 = PQ = (Y+b)(X+a) = XY + aY + bX + ab$

d'où par identification des coefficients d'un polynôme, $\begin{cases} a = b = 0 \\ ab = 1 \end{cases}$, ce qui est absurde.

Donc P ou Q est inversible et donc $XY-1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y]$.

(En particulier comme $\mathbb{C}$ factoriel $\Rightarrow \mathbb{C}[X,Y]$ factoriel, $XY-1$ est premier et donc l'anneau est intègre)   pas besoin c'est dans l'isomorphisme

Étape 2 : $\frac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY-1)} \simeq \mathbb{C}[u, 1/u]$.

Par propriété universelle de l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]$, on peut étendre $id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[u, 1/u]$

en un morphisme $\varphi = id_{\substack{X \mapsto u \\ Y \mapsto 1/u}} : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[u, 1/u]$

• Ce morphisme est surjectif car l'image contient les 2 générateurs u et $1/u$.

• Montrons que $\ker\varphi = (XY-1)$.

× On a $(XY-1) \subset \ker\varphi$ car $u \times \frac{1}{u} - 1 = 0$.

× Réciproquement, si $P \in \ker\varphi$, on voit P dans $\mathbb{C}(X)[Y]$, ainsi X est un élément inversible de $\mathbb{C}(X)$ contrairement à $\mathbb{C}[X]$, et donc on peut effectuer la division euclidienne de P par $(XY-1)$ dans $\mathbb{C}(X)[Y]$:

$P(Y) = (XY-1)Q(Y) + R$ où $Q \in \mathbb{C}(X)[Y]$ et $R \in \mathbb{C}(X)$ car $\deg_Y R < \deg_Y (XY-1) = 1$

On note $A(X) \in \mathbb{C}[X]$ le ppcm des dénominateurs des coefficients de Q et du dénominateur de R, ainsi,

$$AP(Y) = (XY-1)AQ(Y) + AR \quad \text{et} \quad AQ(Y) \in \mathbb{C}[X][Y], \; AR \in \mathbb{C}[X].$$

ainsi, on peut appliquer le morphisme d'anneaux φ :

$$0 = \varphi(A)\varphi(P(Y)) = \varphi(AP(Y)) = \underbrace{\varphi(XY-1)}_{=0}\varphi(AQ(Y)) + \varphi(AR)$$

donc $\varphi(AR) = 0$ or $AR \in \mathbb{C}[X]$ donc $\varphi(AR) = A(u)R(u)$. d'où $AR = 0$.

Attention on ne peut pas conclure en disant $R = 0$ donc $P \in (XY-1)$ car $Q \in \mathbb{C}(X)[Y]$ or $(XY-1) = (XY-1)\mathbb{C}[X][Y]$.

donc $AP(Y) = (XY-1)AQ(Y)$ donc $XY-1$ divise $AP(Y)$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$.
or $XY-1$ est irréductible donc premier car $\mathbb{C}[X,Y]$ est factoriel (car $\mathbb{C}$ l'est)
donc par lemme de Gauss,
comme $A \wedge XY-1 = 1$, on a $XY-1 \mid P(X,Y)$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$ i.e. $P \in (XY-1)$

si $Q \mid A$ et $Q \mid XY-1$ alors $\deg_Y Q = 0$ et $\deg_X(Q) \leq 1$ donc $Q \mid XY-1$ et $Q \mid X$ donc $Q \mid 1$.
donc $A \wedge XY-1 = 1$.

Donc $\ker \varphi = (XY-1)$.
Donc par propriété universelle du quotient, φ se factorise en un isomorphisme $\tilde{\varphi} : \frac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY-1)} \to \mathbb{C}[u, \frac{1}{u}]$

Étape 3 : $\mathbb{C}[u, 1/u]$ est principal.

Lemme : Soient A et B deux anneaux intègres tels que $A \subset B \subset \mathrm{Frac}(A)$. Si A est principal alors B l'est aussi.

Dém : On sait déjà que B est intègre. Soit maintenant I un idéal de B. alors $I \cap A$ est un idéal de A, or A est principal donc il existe $a \in A$ tel que $I \cap A = aA$.
On va montrer que $I = aB$.

- $a \in I \cap A \subset I$ donc $a \in I$ donc $aB \subset I$.

- Réciproquement, soit $x \in I$, comme $I \subset B \subset \mathrm{Frac}(A)$, il existe $(p,q) \in A \times A\setminus\{0\}$ tels que $\begin{cases} p \wedge q = 1 \\ x = \frac{p}{q}. \end{cases}$

donc $\underset{A}{p} = q\underset{\in I}{x} \in I \cap A$ donc il existe $c \in A$ tel que $p = ac$ d'où $x = \frac{ac}{q}$

Il reste à montrer que $\frac{1}{q} \in B$ et on aura $x \in aB$.

Comme A est principal, et $p \wedge q = 1$, par théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in A^2$ tq $up + vq = 1$ d'où $\underset{\in A \subset B}{u}\underbrace{\frac{p}{q}}_{=x \in B} + \underset{\in A \subset B}{v} = \frac{1}{q} \in B$ donc $x \in aB$

donc $I \subset aB$.

$\mathbb{C}$ est un corps donc $\mathbb{C}[u]$ est principal (et donc intègre). $\mathbb{C}[u, 1/u]$ est aussi intègre et on a $\mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[u, 1/u] \subset \mathbb{C}(u)$ donc d'après le lemme, $\mathbb{C}[u, 1/u]$ est principal.

Étape 4 : Si $A \simeq B$ et si B est principal alors A est principal.

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un isomorphisme.

* Soient $(a,b) \in A^2$ tels que $ab = 0$ alors $\varphi(ab) = \varphi(0) = 0$ or B est principal
$= \varphi(a)\varphi(b)$
donc intègre donc $\varphi(a) = 0$ ou $\varphi(b) = 0$ d'où par isomorphisme, $a = 0$ ou $b = 0$.
donc A est intègre

* Soit I un idéal de A, $\varphi(I)$ est un idéal de B car φ est surjectif. donc il existe $b \in B$ tel que $\varphi(I) = bB$ car B est principal.

Montrons que $I = \varphi^{-1}(b)A$.

+ $\varphi(I) = bB$ donc il existe $a \in I$ tel que $\varphi(a) = b$ i.e. $a = \varphi^{-1}(b)$
donc $\varphi^{-1}(b) = a \in I$. donc $\varphi^{-1}(b)A \subset I$.

* Réciproquement, si $x \in I$, $\varphi(x) \in \varphi(I) = bB$ donc il existe $c \in B$ tel que $\varphi(x) = bc$ d'où $x = \varphi^{-1}(bc) = \varphi^{-1}(b)\underbrace{\varphi^{-1}(c)}_{\in A} \in \varphi^{-1}(b)A$

Donc A est principal.

Conclusion : Comme $\mathbb{C}[u, 1/u] \simeq \mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ et que $\mathbb{C}[u, 1/u]$ est principal, on en déduit que $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est principal.

Pour pas parler de factorialité :

- $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ est intègre par l'isomorphisme