Comportement asymptotique de solutions d'équation cinétique

Emeline LUIRARD
sous la direction de
Mihai GRADINARU

17 Juin 2019

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien indépendant de deux v.a. (X_0, V_0). On considère le système:

$$\begin{cases} V_t = V_0 + B_t - \frac{\beta}{2}\int_0^t F(V_s)\,\mathrm{d}s \\ X_t = X_0 + \int_0^t V_s\,\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1}$$

où $\beta > 0$.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien indépendant de deux v.a. (X_0, V_0). On considère le système:

$$\begin{cases} V_t = V_0 + B_t - \dfrac{\beta}{2}\displaystyle\int_0^t F(V_s)\,\mathrm{d}s \\ X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t V_s\,\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1}$$

où $\beta > 0$.
Le potentiel F est de la forme

$$F = -\frac{\vartheta'}{\vartheta},$$

où $\vartheta \in C^2(\mathbb{R}, (0, +\infty))$ est une fonction paire t.q.

$$\lim_{|v|\to\infty} |v|\,\vartheta(v) = 1.$$

Théorème

Soient $\beta > 0$ et $(V_t, X_t)_{t\geq 0}$ une solution. Alors, lorsque ϵ tend vers 0,

i) Si $\beta > 5$, $(\sqrt{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \stackrel{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta B_t)_{t\geq 0}$.

ii) Si $\beta = 5$, $\left(\sqrt{\dfrac{\epsilon}{\log \epsilon}} X_{t/\epsilon}\right)_{t\geq 0} \stackrel{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_5 B_t)_{t\geq 0}$.

iii) Si $\beta \in (1,5)$, $(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \stackrel{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$, où $\alpha = (\beta+1)/3$.

iv) Si $\beta = 1$, $(|\epsilon \log \epsilon|^{3/2} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \stackrel{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_1 S_t^{(2/3)})_{t\geq 0}$.

v) Si $\beta \in (0,1)$,

$$(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon}, \epsilon^{3/2} X_{t/\epsilon}) \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \left(U_t^{(1-\beta)}, \int_0^t U_s^{(1-\beta)}\, \mathrm{d}s\right)_{t\geq 0}.$$

$(S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}$: processus symétrique stable de paramètre $\alpha \in (0,2)$ t.q. $\mathbb{E}\left[\exp(iuS_t^{(\alpha)})\right] = \exp(-t\,|u|^\alpha)$.

$(U_t^{(\delta)})_{t\geq 0}$: processus symétrique de Bessel de dimension $\delta \in (0,1)$.

Et

$$\sigma_\beta^2 = 8c_\beta \int_0^{+\infty} \vartheta^{-\beta}(v) \left[\int_v^{+\infty} u\vartheta^\beta(u)\,\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}v \text{ si } \beta > 5,$$

$$\sigma_5^2 = \frac{4c_5}{27},$$

$$\sigma_\beta^\alpha = \frac{3^{1-2\alpha}2^{\alpha-1}c_\beta\pi}{\Gamma(\alpha)^2\sin(\pi\alpha/2)}, \text{ avec } \alpha = (\beta+1)/3, \text{ si } \beta \in (1,5),$$

$$\sigma_1^{2/3} = \frac{2^{2/3}3^{-5/6}\pi}{\Gamma(2/3)^2}.$$

Lemme

Il suffit de démontrer le théorème pour $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

Lemme

Il suffit de démontrer le théorème pour $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

Démonstration:

Étape 1: Trouver une solution commençant en $(0, 0)$.

Lemme

Il suffit de démontrer le théorème pour $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

Démonstration:

Étape 1: Trouver une solution commençant en $(0,0)$.

$\tau := \inf\{t \geq 0, V_t = 0\} < +\infty$ p.s.

$(\hat{V}_t, \hat{X}_t)_{t\geq 0} := (V_{\tau+t} - V_\tau, X_{\tau+t} - X_\tau)_{t\geq 0}$, indépendant de τ

Lemme

Il suffit de démontrer le théorème pour $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

Démonstration:

Étape 1: Trouver une solution commençant en $(0,0)$.

$\tau := \inf\{t \geq 0, V_t = 0\} < +\infty$ p.s.

$(\hat{V}_t, \hat{X}_t)_{t\geq 0} := (V_{\tau+t} - V_\tau, X_{\tau+t} - X_\tau)_{t\geq 0}$, indépendant de τ

Donc,

$$\left(v_\epsilon^{(\beta)} \hat{X}_{t/\epsilon}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\text{f.d}} \left(X_t^{(\beta)}\right)_{t\geq 0}.$$

ÉTAPE 2: Pour tout $t \geq 0$, $v_\epsilon^{(\beta)} \left| X_{t/\epsilon} - \hat{X}_{t/\epsilon} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

ÉTAPE 2: Pour tout $t \geq 0$, $v_\epsilon^{(\beta)} \left| X_{t/\epsilon} - \hat{X}_{t/\epsilon} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

$$\left| X_{t/\epsilon} - \hat{X}_{t/\epsilon} \right| \leq D^1 + D_t^{2,\epsilon},$$

où $D^1 = |X_0| + \int_0^{2\tau} |V_s|\, ds$ et $D_t^{2,\epsilon} = \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} \left| \hat{V}_s \right| \mathrm{d}s.$

M.q. $v_\epsilon^{(\beta)} D_t^{2,\epsilon} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, lorsque $\epsilon \to 0$.

$$D_t^{2,\epsilon} = \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} \left| \hat{V}_s \right| \mathrm{d}s$$

$$\mathbb{E}\left[v_\epsilon^{(\beta)} D_t^{2,\epsilon} | \mathcal{F}_\tau \right] =$$

M.q. $\boldsymbol{v_\epsilon^{(\beta)} D_t^{2,\epsilon} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0}$**, lorsque** $\boldsymbol{\epsilon \to 0}$**.**

$$D_t^{2,\epsilon} = \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} \left| \hat{V}_s \right| \mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[v_\epsilon^{(\beta)} D_t^{2,\epsilon} | \mathcal{F}_\tau \right] &= v_\epsilon^{(\beta)} \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} \mathbb{E}\left[\left| \hat{V}_u \right| \right] \mathrm{d}u \\ &\leq v_\epsilon^{(\beta)} \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} c \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} (1+u)^{1/(\beta+1)} \, \mathrm{d}u \\ &\leq (\mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} c\tau)(\epsilon + t)^{1/(\beta+1)} v_\epsilon^{(\beta)} \epsilon^{-1/(\beta+1)}. \end{aligned}$$

M.q. $\boldsymbol{v_\epsilon^{(\beta)} D_t^{2,\epsilon} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0}$**, lorsque** $\boldsymbol{\epsilon \to 0}$**.**

$D_t^{2,\epsilon} = \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} \left| \hat{V}_s \right| \mathrm{d}s$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[v_\epsilon^{(\beta)} D_t^{2,\epsilon} | \mathcal{F}_\tau \right] &= v_\epsilon^{(\beta)} \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} \mathbb{E}\left[\left| \hat{V}_u \right| \right] \mathrm{d}u \\
&\leq v_\epsilon^{(\beta)} \mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} c \int_{t/\epsilon - \tau}^{t/\epsilon} (1+u)^{1/(\beta+1)} \mathrm{d}u \\
&\leq (\mathbb{1}_{\{\frac{t}{\epsilon} > \tau\}} c\tau)(\epsilon + t)^{1/(\beta+1)} v_\epsilon^{(\beta)} \epsilon^{-1/(\beta+1)}.
\end{aligned}$$

ÉTAPE 3: Conclusion: $\boldsymbol{(v_\epsilon^{(\beta)} X_{t/\epsilon})_{t \geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (X_t^{(\beta)})_{t \geq 0}}$.

Démonstration du théorème: M.q. $(\sqrt{\epsilon}X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \xRightarrow{\text{f.d}} (\sigma_\beta B_t)_{t\geq 0}$
$X_0 = V_0 = 0$

Démonstration du théorème: M.q. $(\sqrt{\epsilon}X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta B_t)_{t\geq 0}$
$X_0 = V_0 = 0$
$(V_t)_{t\geq 0}$ est récurrent positif, de probabilité invariante

$$\mu_\beta(\mathrm{d}v) = c_\beta(\vartheta(v))^\beta \,\mathrm{d}v,$$

avec $c_\beta^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \vartheta^\beta(v)\,\mathrm{d}v < +\infty$.

Démonstration du théorème: M.q. $(\sqrt{\epsilon}X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta B_t)_{t\geq 0}$
$X_0 = V_0 = 0$
$(V_t)_{t\geq 0}$ est récurrent positif, de probabilité invariante

$$\mu_\beta(\mathrm{d}v) = c_\beta(\vartheta(v))^\beta \,\mathrm{d}v,$$

avec $c_\beta^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \vartheta^\beta(v)\,\mathrm{d}v < +\infty$.
$g : v \mapsto 2\int_0^v \vartheta^{-\beta}(x)\int_x^{+\infty} u\vartheta^\beta(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$ est impaire et satisfait

$$g''(v) - \beta F(v)g'(v) = -2v.$$

M.q.

$$\left(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon}, \epsilon^{3/2} X_{t/\epsilon}\right) \xRightarrow{\mathcal{L}} \left(U_t^{(1-\beta)}, \int_0^t U_s^{(1-\beta)} \, \mathrm{d}s\right)_{t \geq 0}.$$

M.q.

$$\left(\sqrt{\epsilon}V_{t/\epsilon}, \epsilon^{3/2}X_{t/\epsilon}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \left(U_t^{(1-\beta)}, \int_0^t U_s^{(1-\beta)}\,\mathrm{d}s\right)_{t\geq 0}.$$

ÉTAPE 1: Il suffit de m.q. $(\sqrt{\epsilon}V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$ **pour** $V_0 = 0$.

M.q.

$$\left(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon}, \epsilon^{3/2} X_{t/\epsilon}\right) \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \left(U_t^{(1-\beta)}, \int_0^t U_s^{(1-\beta)}\, \mathrm{d}s\right)_{t \geq 0}.$$

ÉTAPE 1: Il suffit de m.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$ pour $V_0 = 0$.

✓ ÉTAPE 1A: Il suffit de m.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$.

M.q.

$$\left(\sqrt{\epsilon}V_{t/\epsilon}, \epsilon^{3/2}X_{t/\epsilon}\right) \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \left(U_t^{(1-\beta)}, \int_0^t U_s^{(1-\beta)}\,\mathrm{d}s\right)_{t\geq 0}.$$

Étape 1: Il suffit de m.q. $(\sqrt{\epsilon}V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$ pour $V_0 = 0$.

- ✓ Étape 1a: Il suffit de m.q. $(\sqrt{\epsilon}V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$.
- ✓ Étape 1b: Pour tout $T > 0$,
  $\delta_T^\epsilon := \sqrt{\epsilon} \sup_{[0,T]} \left| V_{t/\epsilon} - \hat{V}_{t/\epsilon} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta$$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \xRightarrow{\mathcal{L}} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t$$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t \geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t$$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t \geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \mathrm{sgn}(W_{\bar{\tau}_t})\,|W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1-\beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \mathrm{sgn}(W_{\bar{\tau}_t})\,|W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

$$a_\epsilon = \epsilon^{\frac{\beta+1}{2}}$$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t \geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (U_t^{(1-\beta)})_{t \geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \operatorname{sgn}(W_{\bar{\tau}_t}) \, |W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

$$a_\epsilon = \epsilon^{\frac{\beta+1}{2}} \rightsquigarrow A_t^\epsilon$$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t \geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t \geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \mathrm{sgn}(W_{\bar{\tau}_t})\,|W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

$$a_\epsilon = \epsilon^{\frac{\beta+1}{2}} \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon$$

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \mathrm{sgn}(W_{\bar{\tau}_t})\,|W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

$$a_\epsilon = \epsilon^{\frac{\beta+1}{2}} \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon \rightsquigarrow V_t^\epsilon := h^{-1}\left(\frac{W_{\tau_t^\epsilon}}{a_\epsilon}\right)$$

Étape 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1-\beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \mathrm{sgn}(W_{\bar{\tau}_t})\,|W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

$$a_\epsilon = \epsilon^{\frac{\beta+1}{2}} \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon \rightsquigarrow V_t^\epsilon := h^{-1}\left(\frac{W_{\tau_t^\epsilon}}{a_\epsilon}\right)$$

Or, $(\sqrt{\epsilon} V_t^\epsilon)_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0}$.

ÉTAPE 2: M.q. $(\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$, quand $V_0 = 0$.

$$\delta = 1 - \beta \rightsquigarrow \bar{A}_t \rightsquigarrow \bar{\tau}_t \rightsquigarrow U_t^{(1-\beta)} := \mathrm{sgn}(W_{\bar{\tau}_t})\,|W_{\bar{\tau}_t}|^{1/(2-\delta)}$$

(Donati-Roynette-Vallois-Yor)

$$a_\epsilon = \epsilon^{\frac{\beta+1}{2}} \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon \rightsquigarrow V_t^\epsilon := h^{-1}\left(\frac{W_{\tau_t^\epsilon}}{a_\epsilon}\right)$$

Or, $(\sqrt{\epsilon} V_t^\epsilon)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\sqrt{\epsilon} V_{t/\epsilon})_{t\geq 0}$.
Donc, il suffit de m.q. $(\sqrt{\epsilon} V_t^\epsilon)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} (U_t^{(1-\beta)})_{t\geq 0}$,
ou encore, pour tout $T \geq 0$, $\sup_{[0,T]} \left|\sqrt{\epsilon} V_t^\epsilon - U_t^{(1-\beta)}\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, quand $\epsilon \to 0$.

M.q. $\left(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon}\right)_{t \geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} \left(\sigma_\beta S_t^{(\alpha)}\right)_{t \geq 0}$.

On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

M.q. $\boldsymbol{(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t \geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta S_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}}$.

On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

$K_t^\eta := \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha - 2}\,\mathbb{1}_{|W_s| \geq \eta}\,\mathrm{d}s \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.

M.q. $\left(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon}\right)_{t \geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} \left(\sigma_\beta S_t^{(\alpha)}\right)_{t \geq 0}$.

On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

$K_t^\eta := \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha - 2}\, \mathbb{1}_{|W_s| \geq \eta}\, \mathrm{d}s \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.

$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1} (\beta + 1)^{1/\alpha - 2} c_\beta^{1/\alpha} K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t \geq 0}$ (Biane-Yor).

M.q. $\boldsymbol{(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}}$.
On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.
$K_t^\eta := \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha - 2}\, \mathbb{1}_{|W_s|\geq\eta}\, \mathrm{d}s \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.
$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1}(\beta+1)^{1/\alpha-2} c_\beta^{1/\alpha} K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t\geq 0}$ (Biane-Yor).

a_ϵ

M.q. $\boldsymbol{(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}}$**.**

On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

$K_t^\eta := \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha-2}\,\mathbb{1}_{|W_s|\geq\eta}\,\mathrm{d}s \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.

$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1}(\beta+1)^{1/\alpha-2} c_\beta^{1/\alpha} K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t\geq 0}$ (Biane-Yor).

$a_\epsilon \rightsquigarrow A_t^\epsilon$

M.q. $\left(\sqrt[\alpha]{\epsilon}X_{t/\epsilon}\right)_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} \left(\sigma_\beta S_t^{(\alpha)}\right)_{t\geq 0}$.
On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.
$K_t^\eta := \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha-2}\,\mathbb{1}_{|W_s|\geq\eta}\,\mathrm{d}s \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.
$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1}(\beta+1)^{1/\alpha-2}c_\beta^{1/\alpha}K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t\geq 0}$ (Biane-Yor).

$$a_\epsilon \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon$$

M.q. $\left(\sqrt[\alpha]{\epsilon}X_{t/\epsilon}\right)_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} \left(\sigma_\beta S_t^{(\alpha)}\right)_{t\geq 0}$.

On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

$K_t^\eta := \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha-2}\,\mathbb{1}_{|W_s|\geq\eta}\,\mathrm{d}s \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.

$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1}(\beta+1)^{1/\alpha-2}c_\beta^{1/\alpha}K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t\geq 0}$ (Biane-Yor).

$$a_\epsilon \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon \rightsquigarrow H_t^\epsilon := \frac{1}{a_\epsilon^2}\int_0^t \phi\left(\frac{W_s}{a_\epsilon}\right)\mathrm{d}s$$

M.q. $\boldsymbol{(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}}$.
On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.
$K_t^\eta := \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha-2}\,\mathbb{1}_{|W_s|\geq\eta}\,\mathrm{d}s \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.
$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1}(\beta+1)^{1/\alpha-2} c_\beta^{1/\alpha} K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t\geq 0}$ (Biane-Yor).

$$a_\epsilon \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon \rightsquigarrow H_t^\epsilon := \frac{1}{a_\epsilon^2}\int_0^t \phi\left(\frac{W_s}{a_\epsilon}\right)\mathrm{d}s \rightsquigarrow X_t^\epsilon := H_{\tau_t^\epsilon}^\epsilon$$

M.q. $\boldsymbol{(\sqrt[\alpha]{\epsilon} X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\sigma_\beta S_t^{(\alpha)})_{t\geq 0}}$.

On se ramène à $X_0 = V_0 = 0$ p.s.

$K_t^\eta := \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)\,|W_s|^{1/\alpha-2}\,\mathbb{1}_{|W_s|\geq\eta}\,\mathrm{d}s \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} K_t$ p.s.

$S_t^{(\alpha)} := \sigma_\beta^{-1}(\beta+1)^{1/\alpha-2} c_\beta^{1/\alpha} K_{\tau_t}$ est un processus symétrique α-stable, où (τ_t) est l'inverse du temps local en 0 de $(W_t)_{t\geq 0}$ (Biane-Yor).

$$a_\epsilon \rightsquigarrow A_t^\epsilon \rightsquigarrow \tau_t^\epsilon \rightsquigarrow H_t^\epsilon := \frac{1}{a_\epsilon^2}\int_0^t \phi\left(\frac{W_s}{a_\epsilon}\right)\mathrm{d}s \rightsquigarrow X_t^\epsilon := H_{\tau_t^\epsilon}^\epsilon$$

Or, $(X_{t/\epsilon})_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (X_t^\epsilon)_{t\geq 0}$.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien indépendant de deux v.a. (X_0, V_0). On considère le système:

$$\begin{cases} V_t = V_0 + B_t - \dfrac{\beta}{2} \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{sgn}(V_s)\,|V_s|^{\alpha}}{s^{\gamma}}\,\mathrm{d}s, \\ X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t V_s\,\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2}$$

où α, γ, $\rho \in \mathbb{R}$.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien indépendant de deux v.a. (X_0, V_0). On considère le système:

$$\begin{cases} V_t = V_0 + B_t - \dfrac{\beta}{2}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\operatorname{sgn}(V_s)\,|V_s|^\alpha}{s^\gamma}\,\mathrm{d}s, \\ X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t V_s\,\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2}$$

où α, γ, $\rho \in \mathbb{R}$.

Theorème

Pour $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $2\gamma - (\alpha + 1) > 0$. Soit $(V_t, X_t)_{t\geq 0}$ une solution. Alors, lorsque ϵ tend vers 0,

$$(\epsilon^{3/2} X_{t/\epsilon})_{t\geq 1} \overset{\text{f.d}}{\Longrightarrow} (\beta_{t^3/3})_{t\geq 1},$$

où $(\beta_t)_{t\geq 0}$ est un mB.

Changement de temps exponentiel

Changement de temps: $\phi_e : t \mapsto e^t$.
Renormalisation: $\Phi_e(\omega) : s \mapsto \dfrac{\omega_{e^s}}{e^{s/2}}$, pour $\omega \in \Omega$.
On définit $V^{(e)} := \Phi_e(V)$ et $X_t^{(e)} := \displaystyle\int_0^t V_s^{(e)} \, \mathrm{d}s$.

Changement de temps exponentiel

Changement de temps: $\phi_e : t \mapsto e^t$.
Renormalisation: $\Phi_e(\omega) : s \mapsto \frac{\omega_{e^s}}{e^{s/2}}$, pour $\omega \in \Omega$.
On définit $V^{(e)} := \Phi_e(V)$ et $X_t^{(e)} := \int_0^t V_s^{(e)} \,\mathrm{d}s$. Alors,

$$\mathrm{d}V_s^{(e)} = \mathrm{d}W_s - \frac{V_s^{(e)}}{2}\,\mathrm{d}s - \frac{\beta}{2} e^{\left(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma\right)s} \operatorname{sgn}(V_s^{(e)}) \left|V_s^{(e)}\right|^{\alpha} \mathrm{d}s, \quad (3)$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mB.

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

$$X_t^{(e)} = \int_0^t V_s^{(e)} \,\mathrm{d}s = X_{e^t} e^{-3t/2} - X_1 + \frac{3}{2}\int_0^t X_{e^u} e^{-3u/2} \,\mathrm{d}u.$$

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

$$X_t^{(e)} = \int_0^t V_s^{(e)}\,\mathrm{d}s = X_{e^t} e^{-3t/2} - X_1 + \frac{3}{2}\int_0^t X_{e^u} e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons $G : t \mapsto \int_0^t X_{e^u} e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u$,

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

$$X_t^{(e)} = \int_0^t V_s^{(e)}\,\mathrm{d}s = X_{e^t}e^{-3t/2} - X_1 + \frac{3}{2}\int_0^t X_{e^u}e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons $G : t \mapsto \int_0^t X_{e^u}e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u$,

$$G'(t) + \frac{3}{2}G(t) = X_t^{(e)} + X_1, \;\; G(0) = 0.$$

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

$$X_t^{(e)} = \int_0^t V_s^{(e)}\,\mathrm{d}s = X_{e^t}e^{-3t/2} - X_1 + \frac{3}{2}\int_0^t X_{e^u}e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons $G : t \mapsto \int_0^t X_{e^u}e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u,$

$$G'(t) + \frac{3}{2}G(t) = X_t^{(e)} + X_1, \;\; G(0) = 0.$$

Solution:

$$G : t \mapsto e^{-3t/2}\int_0^t X_s^{(e)}e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + \frac{2}{3}X_1(1 - e^{-3t/2}).$$

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

$$X_t^{(e)} = \int_0^t V_s^{(e)}\,\mathrm{d}s = X_{e^t}e^{-3t/2} - X_1 + \frac{3}{2}\int_0^t X_{e^u}e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons $G : t \mapsto \int_0^t X_{e^u}e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u$,

$$G'(t) + \frac{3}{2}G(t) = X_t^{(e)} + X_1,\;\; G(0) = 0.$$

Solution:

$$G : t \mapsto e^{-3t/2}\int_0^t X_s^{(e)}e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + \frac{2}{3}X_1(1 - e^{-3t/2}).$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$X_{e^t}e^{-3t/2} = X_t^{(e)} - \frac{3}{2}e^{-3t/2}\int_0^t X_s^{(e)}e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + X_1 e^{-3t/2}.$$

Démonstration du théorème:

ÉTAPE 1: Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ comme fonction de $(X_t^{(e)})_{t\geq 0}$.

$$X_t^{(e)} = \int_0^t V_s^{(e)}\,\mathrm{d}s = X_{e^t} e^{-3t/2} - X_1 + \frac{3}{2}\int_0^t X_{e^u} e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons $G : t \mapsto \int_0^t X_{e^u} e^{-3u/2}\,\mathrm{d}u$,

$$G'(t) + \frac{3}{2}G(t) = X_t^{(e)} + X_1, \;\; G(0) = 0.$$

Solution:

$$G : t \mapsto e^{-3t/2}\int_0^t X_s^{(e)} e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + \frac{2}{3}X_1(1 - e^{-3t/2}).$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$X_{e^{t/\epsilon}} e^{-3t/2\epsilon} = X_{t/\epsilon}^{(e)} - \frac{3}{2\epsilon} e^{-3t/2\epsilon}\int_0^t X_{u/\epsilon}^{(e)} e^{3u/2\epsilon}\,\mathrm{d}u + X_1 e^{-3t/2\epsilon}.$$

ÉTAPE 2: Étude du terme central.

$$\frac{3}{2\epsilon} e^{-3t/2\epsilon} \int_0^t X_{u/\epsilon}^{(e)} e^{3u/2\epsilon} \, \mathrm{d}u = X_{t/\epsilon}^{(e)} - \frac{1}{\epsilon} e^{-3t/2\epsilon} \int_0^t V_{s/\epsilon}^{(e)} e^{3s/2\epsilon} \, \mathrm{d}s.$$

ÉTAPE 2: Étude du terme central.

$$\frac{3}{2\epsilon}e^{-3t/2\epsilon}\int_0^t X_{u/\epsilon}^{(e)}e^{3u/2\epsilon}\,\mathrm{d}u = X_{t/\epsilon}^{(e)} - \frac{1}{\epsilon}e^{-3t/2\epsilon}\int_0^t V_{s/\epsilon}^{(e)}e^{3s/2\epsilon}\,\mathrm{d}s.$$

Donc,

$$X_{e^{t/\epsilon}}e^{-3t/2\epsilon} = e^{-3t/2\epsilon}\int_0^{t/\epsilon} V_s^{(e)}e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + X_1e^{-3t/2\epsilon}.$$

ÉTAPE 2: Étude du terme central.

$$\frac{3}{2\epsilon}e^{-3t/2\epsilon}\int_0^t X_{u/\epsilon}^{(e)} e^{3u/2\epsilon}\,\mathrm{d}u = X_{t/\epsilon}^{(e)} - \frac{1}{\epsilon}e^{-3t/2\epsilon}\int_0^t V_{s/\epsilon}^{(e)} e^{3s/2\epsilon}\,\mathrm{d}s.$$

Donc,

$$X_{e^{t/\epsilon}} e^{-3t/2\epsilon} = e^{-3t/2\epsilon}\int_0^{t/\epsilon} V_s^{(e)} e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + X_1 e^{-3t/2\epsilon}.$$

Ou encore, pour $u \geq 1$,

$$\epsilon^{\frac{3}{2}} X_{u/\epsilon} = \epsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^{\ln(u/\epsilon)} V_s^{(e)} e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + \epsilon^{\frac{3}{2}} X_1.$$

Simulations pour $t = 7$ et $\epsilon = 10^{-4}$

$\tilde{V}^{(e)}$ est un Ornstein Ulhenbeck

$$U_t := -\int_0^t \frac{\beta}{2} e^{-(t-s)/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s} \operatorname{sgn}(V_s^{(e)}) \left| V_s^{(e)} \right|^{\alpha} \mathrm{d}s$$

Figure: Histogramme de $\epsilon^{3/2} X_{t/\epsilon} \approx \epsilon^{3/2} \int_0^{\log(t/\epsilon)} \tilde{V}_s^{(e)} e^{3s/2} \, \mathrm{d}u$ et superposition avec $\mathcal{N}(0, t^3/3)$.

Figure: Histogramme de $\epsilon^{3/2} X_{t/\epsilon} \approx \epsilon^{3/2} \int_0^{\log(t/\epsilon)} (\tilde{V}_s^{(e)} + U_s) e^{3s/2} \, \mathrm{d}u$ et superposition avec $\mathcal{N}(0, t^3/3)$.

Formule d'Itô:

$$V^{(e)}_{t/\epsilon} e^{3t/2\epsilon} = V^{(e)}_0 + \int_0^{t/\epsilon} V^{(e)}_s e^{3s/2} \,\mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^{t/\epsilon} e^{3s/2} \,\mathrm{d}W_s - \int_0^{t/\epsilon} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s} \,\mathrm{sgn}(V^{(e)}_s) \left| V^{(e)}_s \right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

Formule d'Itô:

$$V_{t/\epsilon}^{(e)} e^{3t/2\epsilon} = V_0^{(e)} + \int_0^{t/\epsilon} V_s^{(e)} e^{3s/2}\,\mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^{t/\epsilon} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s - \int_0^{t/\epsilon} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s}\,\mathrm{sgn}(V_s^{(e)}) \left|V_s^{(e)}\right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

D'où,

$$X_{e^{t/\epsilon}} e^{-3t/2\epsilon} = e^{-3t/2\epsilon}(X_1 - V_0^{(e)}) + V_{t/\epsilon}^{(e)} - e^{-3t/2\epsilon} \int_0^{t/\epsilon} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s$$
$$+ e^{-3t/2\epsilon} \int_0^{t/\epsilon} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s}\,\mathrm{sgn}(V_s^{(e)}) \left|V_s^{(e)}\right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

Formule d'Itô:

$$V^{(e)}_{t/\epsilon} e^{3t/2\epsilon} = V^{(e)}_0 + \int_0^{t/\epsilon} V^{(e)}_s e^{3s/2}\,\mathrm{d}s + \int_0^{t/\epsilon} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s - \int_0^{t/\epsilon} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s} \operatorname{sgn}(V^{(e)}_s) \left|V^{(e)}_s\right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

D'où,

$$X_{e^{t/\epsilon}} e^{-3t/2\epsilon} = e^{-3t/2\epsilon}(X_1 - V^{(e)}_0) + V^{(e)}_{t/\epsilon} - e^{-3t/2\epsilon} \int_0^{t/\epsilon} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s + e^{-3t/2\epsilon} \int_0^{t/\epsilon} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s} \operatorname{sgn}(V^{(e)}_s) \left|V^{(e)}_s\right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

Ou encore, pour $u \geq 1$,

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = \epsilon^{3/2}(X_1 - V^{(e)}_0) + u^{3/2} V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s + \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s} \operatorname{sgn}(V^{(e)}_s) \left|V^{(e)}_s\right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

Étape 3: Passer à la limite $\epsilon \to 0$.

Étape 3: Passer à la limite $\epsilon \to 0$.

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = \epsilon^{3/2}(X_1 - V_0^{(e)}) + u^{3/2} V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\, \mathrm{d}W_s$$
$$+ \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2} - \gamma)s} \operatorname{sgn}(V_s^{(e)}) \left| V_s^{(e)} \right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

ÉTAPE 3: Passer à la limite $\epsilon \to 0$.

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = \epsilon^{3/2}(X_1 - V_0^{(e)}) + u^{3/2} V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\, \mathrm{d}W_s$$
$$+ \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} \frac{\beta}{2} e^{3s/2} e^{(\frac{\alpha+1}{2} - \gamma)s} \operatorname{sgn}(V_s^{(e)}) \left| V_s^{(e)} \right|^{\alpha} \mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = Y_u^{\epsilon} + u^{3/2} V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\, \mathrm{d}W_s,$$

avec $Y_u^{\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ p.s.

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = Y_u^\epsilon + u^{3/2} V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\, \mathrm{d}W_s.$$

$$\epsilon^{3/2}X_{u/\epsilon} = Y_u^\epsilon + u^{3/2}V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2}\int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\epsilon^{3/2}X_{u/\epsilon} &= Y_u^\epsilon + \sqrt{\epsilon}uV_0^{(e)} + \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})}\left[u^{3/2}e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}} - \epsilon^{3/2}e^{3s/2}\right]\mathrm{d}W_s \\ &\quad - u^{3/2}\int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})}\frac{\beta}{2}e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s}e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}}\operatorname{sgn}(V_s^{(e)})\left|V_s^{(e)}\right|^\alpha\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = Y_u^\epsilon + u^{3/2} V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\, \mathrm{d}W_s.$$

Ainsi,

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = Y_u^\epsilon + \sqrt{\epsilon} u V_0^{(e)} + \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} \left[u^{3/2} e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}} - \epsilon^{3/2} e^{3s/2} \right] \mathrm{d}W_s$$

$$- u^{3/2} \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} \frac{\beta}{2} e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s} e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}} \operatorname{sgn}(V_s^{(e)}) \left| V_s^{(e)} \right|^\alpha \mathrm{d}s.$$

Donc,

$$\epsilon^{3/2} X_{u/\epsilon} = Z_u^\epsilon + \underbrace{\int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} \left[u^{3/2} e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}} - \epsilon^{3/2} e^{3s/2} \right] \mathrm{d}W_s}_{:=\epsilon^{3/2} M_{\ln(\frac{u}{\epsilon})}}.$$

$$\epsilon^{3/2}X_{u/\epsilon} = Y_u^\epsilon + u^{3/2}V^{(e)}_{\ln(\frac{u}{\epsilon})} - \epsilon^{3/2}\int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})} e^{3s/2}\,\mathrm{d}W_s.$$

Ainsi,

$$\epsilon^{3/2}X_{u/\epsilon} = Y_u^\epsilon + \sqrt{\epsilon}uV_0^{(e)} + \int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})}\left[u^{3/2}e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}} - \epsilon^{3/2}e^{3s/2}\right]\mathrm{d}W_s$$
$$- u^{3/2}\int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})}\frac{\beta}{2}e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\gamma)s}e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}}\,\mathrm{sgn}(V_s^{(e)})\left|V_s^{(e)}\right|^\alpha\mathrm{d}s.$$

Donc,

$$\epsilon^{3/2}X_{u/\epsilon} = Z_u^\epsilon + \underbrace{\int_0^{\ln(\frac{u}{\epsilon})}\left[u^{3/2}e^{-\frac{\ln(\frac{u}{\epsilon})-s}{2}} - \epsilon^{3/2}e^{3s/2}\right]\mathrm{d}W_s}_{:=\epsilon^{3/2}M_{\ln(\frac{u}{\epsilon})}}.$$

Représentation de DDS:

$$\epsilon^{3/2}X_{u/\epsilon} \overset{\mathcal{L}}{=} \underbrace{Z_u^\epsilon}_{} + \beta_{\frac{(u-\epsilon)^3}{3}}.$$

Merci pour votre attention !

Bibliographie

- Bertoin; *Levy Processes*, 1998
- Billingsley; *Convergence of Probability Measures*, 1999
- Fournier, Tardif; *One dimensional critical kinetic Fokker-Planck equations, Bessel and stable processes*, 2018
- Jacod, Shiryaev; *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2003
- Kallenberg; *Foundations of Modern Probability*, 2002
- Karatzas, Shreve; *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 1998
- Offret; *Dynamique de diffusions inhomogènes sous des conditions d'invariance d'échelle*, 2012
- Revuz, Yor; *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 1999
- Watanabe, Ikeda; *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 1981